

Electromagnetismo I & II

Martín Otero Lema

Prefacio:

Estos son unos apuntes de las asignaturas de electromagnetismo I y II para el segundo año del grado en física de la USC. Su objetivo es condensar en un solo documento el contenido de estas dos asignaturas, de manera espero que más o menos clara.

Aún así, tened en cuenta que esta no es la versión final de los apuntes, ya que faltan algunas cosas y gran parte de su contenido está sin revisar, así que si hay algo que os parezca raro, probablemente sea que la he cagado yo. Cualquier fallo que encontréis, agradecería muchísimo que me lo mandaseis a martin.otero.lemma@rai.usc.es para poder corregirlo lo antes posible (que probablemente sea despues de los exámenes de enero). Muchas gracias y ánimo con la asignatura.

Martín Otero

Índice general

I Electromagnetismo I	7
1. Introducción al análisis vectorial	9
1.1. Gradiente, divergencia y rotacional	9
1.1.1. Gradiente	9
1.1.2. Divergencia	9
1.1.3. Rotacional	9
1.2. Teoremas fundamentales del análisis vectorial	10
1.3. Teorema de Helmholtz	11
2. Electrostática en el vacío	13
2.1. El campo electrostático	14
2.1.1. La ley de Gauss	14
2.1.2. Funciones de potencial del campo electrostático	16
2.1.3. Ecuaciones de Poisson y de Laplace	18
2.2. Teorema de Earnshaw	18
2.2.1. Condiciones para un equilibrio estable	18
2.2.2. Formulación y demostración del teorema	18
2.2.3. Regiones provistas de carga	19
2.2.4. Significado físico	19
2.3. El dipolo eléctrico.	19
2.4. Expansión multipolar del potencial escalar eléctrico	20
2.5. La función delta de Dirac	23
3. Electrostática en medios materiales	29
3.1. Conductores en equilibrio electrostático	29
3.1.1. Blindaje utilizando conductores	31
3.1.2. La jaula de Faraday	32
3.1.3. El efecto punta	33
3.2. Medios dieléctricos	34
3.2.1. Densidades de carga de polarización	34
3.2.2. El vector desplazamiento eléctrico	36
3.2.3. El tensor susceptibilidad eléctrica	36
3.3. Condiciones de contorno en la separación entre medios	37
3.3.1. Continuidad de las componentes tangenciales de \vec{E}	37
3.3.2. Discontinuidad en las componentes normales de \vec{D}	37
3.4. Ecuaciones de Poisson y Laplace en medios dieléctricos	38
3.5. El electreto	39
4. Energía y fuerzas electrostáticas.	43
4.1. Energía de configuración de un sistema de cargas puntuales	43
4.1.1. Energía almacenada en distribuciones continuas	44
4.2. Energía electrostática en términos de cantidades de campo	45

4.2.1. Ejemplo: Energía almacenada en un condensador.	46
4.3. Energía de polarización	47
4.3.1. Energía de polarización desde el punto de vista del campo	49
4.4. Fuerza electrostática entre las placas de un condensador	49
4.4.1. Condensador aislado	50
4.4.2. Condensador conectado a baterías	50
4.5. Presión electrostática	52
4.5.1. Ejemplo: Esfera cortada por un plano	53
4.6. Autoenergía electrostática	55
5. Métodos especiales en electrostática.	57
5.1. Unicidad de solución de la ecuación de Laplace	57
5.2. Unicidad de solución de la ecuación de Poisson	58
5.3. Método de las imágenes	60
5.3.1. Ejemplo 1: Carga puntual enfrentada a un plano conductor	61
5.3.2. Ejemplo 2: Carga puntual enfrentada a una esfera conductora	62
5.4. Solución de la ecuación de Laplace	64
5.4.1. Ejemplo: Potencial generado por una corteza esférica.	65
6. Corrientes eléctricas estacionarias.	69
6.1. Vector densidad de corriente	69
6.1.1. Relación con los portadores de carga	70
6.1.2. Distribuciones de corriente superficiales y filamentosas	70
6.2. El principio de conservación de la carga. Ecuación de continuidad	71
6.2.1. Corrientes estacionarias	72
6.2.2. Corrientes de polarización	73
6.3. Tensor conductividad eléctrica. La ley de Ohm	73
6.4. Condiciones de frontera. Refracción del campo eléctrico	74
6.5. Resistencia y capacidad	76
6.6. Transición hacia el equilibrio electrostático	77
6.7. Circuitos eléctricos	77
6.7.1. Relaciones energéticas. La ley de Joule	79
6.7.2. Leyes de Kirchhoff	80
II Electromagnetismo II	83
7. Magnetostática en el vacío	85
7.1. Postulados en el espacio libre	85
7.2. Funciones de potencial del campo magnético	85
7.3. La ley de Lorentz	86
7.3.1. Trabajo realizado por el campo magnético	86
7.3.2. Trabajo electromagnético	86
7.4. Ley de Biot-Savart	87
7.4.1. Corrientes superficiales y filamentosas	88
7.5. Ley de Ampère	88
7.5.1. Ejemplo: Campo generado por un cilindro	89
7.5.2. Ejemplo: Campo generado por un solenoide ideal infinito	90
7.5.3. Ejemplo: Campo generado por un toroide	92
7.6. Ley de fuerzas de Ampère	94
7.7. Partículas en campos magnéticos uniformes	97

8. Magnetostática en medios materiales	101
8.1. Expansión multipolar del potencial vector	101
8.1.1. Interacción campo-dipolo	102
8.2. Medios magnéticos	104
8.2.1. Corrientes de magnetización	105
8.2.2. La intensidad de campo magnético \vec{H}	107
8.2.3. El tensor susceptibilidad magnética	107
8.2.4. Potencial escalar magnético	108
8.3. Clasificación de los materiales magnéticos	109
8.3.1. Dominios magnéticos. Ciclo de histéresis	110
8.3.2. Materiales ferromagnéticos duros y blandos	111
8.4. Condiciones de contorno en la separación entre medios	112
8.4.1. Medios l.h.i	112
8.4.2. Medios de imanación arbitraria	113
8.5. Circuitos magnéticos	113
8.5.1. Leyes de Kirchhoff para circuitos magnéticos	114
9. Campos variables en el tiempo I	117
9.1. Inducción electromagnética. La ley de Faraday	117
9.1.1. Circuito estacionario en un campo variable	117
9.1.2. Circuito móvil en un campo variable	118
9.2. Inductancias e inductores	118
9.2.1. Autoinducción	119
9.3. Energía magnética	120
9.3.1. Energía magnética en términos de cantidades de campo	122
9.3.2. Energía disipada en un ciclo de histéresis	123
9.3.3. Fuerzas magnéticas	125
10. Campos variables en el tiempo II	127
10.1. Ecuación de Ampère-Maxwell	127
10.2. Ecuaciones de onda para \vec{E} y \vec{B}	128
10.2.1. Ecuación de onda para el campo eléctrico	128
10.2.2. Ecuación de onda para el campo magnético	129
10.2.3. Soluciones a las ecuaciones de Maxwell	129
10.3. Funciones de potencial	130
10.3.1. Ecuación para el potencial vector	130
10.3.2. Ecuación para el potencial escalar	131
10.4. Transformaciones gauge	131
10.4.1. Gauge de Coulomb	133
10.4.2. Gauge de Lorenz	133
10.5. Soluciones a la ecuación de ondas. Potenciales retardados.	134
10.6. Fasores	138
10.6.1. Derivadas e integrales en notación fasorial	139
10.6.2. Ecuaciones de Maxwell en notación fasorial	140
10.6.3. Potenciales cuasiestacionarios	140
10.7. Teorema de Poynting	141
10.7.1. Medios l.h.i	142
10.8. Ondas electromagnéticas planas	143
10.8.1. Impedancia intrínseca	145
10.8.2. Superposición de soluciones	146
10.8.3. Polarización de ondas planas	148
10.9. Ondas planas en medios con pérdidas	149
10.9.1. Medios con pequeñas pérdidas	152
10.9.2. Buenos conductores	153

10.10	Densidades de potencia instantánea y media	155
10.11	Caso general. Propagación en direcciones arbitrarias	156
10.11.1	Expresión general para $\langle \vec{S} \rangle$	157
10.12	Ondas en direcciones opuestas	158
10.12.1	Ejemplo: Onda estacionaria en el vacío	159
11.	Circuitos de corriente alterna	161
11.1.	Limitaciones de la teoría de circuitos. Campos de variación lenta	161
11.2.	Voltajes y diferencias de potencial	162
11.3.	Señales periódicas	164
11.4.	Resistencias, inductores y condensadores	164
11.4.1.	Resistencias	164
11.4.2.	Inductores	164
11.4.3.	Condensadores	165
11.5.	Impedancia	165
11.6.	Análisis de circuitos	166
11.6.1.	Valores eficaces	167
11.7.	Potencia en un circuito alterno	167
11.8.	Potencia activa y factor de potencia	168
11.8.1.	Potencia reactiva y potencia aparente	169
11.8.2.	Teorema de Tellegen	169
11.9.	Resonancia en un circuito RLC en serie	170
11.10	Factor de calidad	171
11.10.1.	Circuito RL en serie	171
11.10.2.	Circuito RC en serie	171
11.10.3.	Circuito RLC en serie	172
11.11	Teoremas de Thévenin y Norton	173
11.12	Transformadas de Laplace	174
11.12.1.	Transformada inversa	175
11.12.2.	Algunas transformadas útiles	175
11.12.3.	Propiedades de la transformada	176
11.12.4.	Aplicaciones para la resolución de circuitos	177
12.	Líneas de transmisión y antenas	181
12.1.	Introducción a las líneas de transmisión	181
12.2.	Modelo de conductor: línea coaxial	182
12.3.	Modelo de parámetros distribuidos	184
12.3.1.	Parámetros distribuidos en una línea coaxial	188
12.4.	Coefficiente de reflexión	188
12.5.	Relaciones de tensión	190
12.6.	Antenas y campos lejanos	190

Parte I

Electromagnetismo I

Capítulo 1

Introducción al análisis vectorial

A lo largo del desarrollo del temario, nos apoyaremos en varios conceptos matemáticos que nos ayudaran a establecer el formalismo que describe el comportamiento de los campos electromagnéticos. Esta sección está dedicada al repaso de estas ideas, de forma muy resumida.

1.1. Gradiente, divergencia y rotacional

Recordemos el significado del gradiente de un campo escalar y de la divergencia y rotacional de un campo vectorial.

1.1.1. Gradiente

Sea A un campo escalar cualquiera. Su gradiente se denota como.

$$\text{grad}(A) \equiv \nabla A \quad (1.1)$$

El gradiente de un campo escalar es un campo vectorial, que apunta en la dirección en la que aumentan los valores de A .

1.1.2. Divergencia

Sea ahora \vec{A} un campo vectorial. Denotaremos su divergencia de la siguiente manera.

$$\text{div}(\vec{A}) \equiv \nabla \cdot \vec{A} \quad (1.2)$$

La divergencia de un campo vectorial es un campo escalar, y nos ofrece información acerca del comportamiento de las líneas de campo. Más concretamente, la divergencia nos indica las fuentes y sumideros de líneas de campo. Aquellas regiones donde $\nabla \cdot \vec{A} > 0$ son fuentes de campo, lugares donde "nacen" las líneas de campo. Al contrario, las regiones donde $\nabla \cdot \vec{A} < 0$ son sumideros de campo, lugares donde "mueren" estas líneas. Finalmente, uno podría preguntarse que ocurre cuando $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. En estas regiones, el campo se conoce como solenoidal, y no tiene ni fuentes ni sumideros, condición que impone que las líneas de campo sean cerradas (o, en ciertos casos que veremos más adelante, que se prolonguen hasta el infinito manteniéndose constantes)

1.1.3. Rotacional

Sea de nuevo \vec{A} un campo vectorial. Denotaremos su rotacional como.

$$\text{rot}(\vec{A}) \equiv \nabla \times \vec{A} \quad (1.3)$$

Al contrario que la divergencia, el rotacional de un campo vectorial es otro campo vectorial. El significado intuitivo del rotacional es menos evidente que el del gradiente o el de la divergencia, pero se puede interpretar como una medida de la inhomogeneidad de las líneas de campo. Para ello podemos pensar en un campo radial (todas sus líneas de campo son rectas y parten del origen). Si el comportamiento de las líneas de campo (el módulo del campo vectorial) no depende de la dirección, el rotacional será nulo; sin embargo si el módulo del campo se comporta de manera diferente en función del ángulo (rompiendo así la simetría), tendríamos un rotacional no nulo.

1.2. Teoremas fundamentales del análisis vectorial

Estos tres teoremas resultan clave para simplificar en gran medida el trabajo con campos tanto escalares como vectoriales. En estos apuntes nos limitaremos a enunciarlos sin demostración, ya que no es material de esta asignatura.

Teorema del gradiente: Si ϕ es un campo escalar cualquiera y Γ es un camino que une los puntos a y b , entonces se verifica la siguiente igualdad.

$$\int_{\Gamma} \nabla \phi \cdot d\vec{l} = \phi(b) - \phi(a) \quad (1.4)$$

Este teorema pone de manifiesto que si un determinado campo vectorial se puede obtener a través del gradiente de una función escalar, su circulación entre dos puntos a y b no depende del camino escogido. A estos campos se los conoce como campos conservativos. Una propiedad de estos campos que se deriva directamente del teorema del gradiente es que si \vec{A} es un campo conservativo y γ un camino cerrado cualquiera.

$$\oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.5)$$

Teorema de la divergencia: Sea \vec{A} un campo vectorial cualquiera, S una superficie cerrada arbitraria y τ la región contenida en el interior de la superficie S . El teorema de la divergencia establece que.

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{\tau} (\nabla \cdot \vec{A}) dV \quad (1.6)$$

Donde los vectores $d\vec{s}$ están escogidos de tal manera que apuntan al exterior de la superficie cerrada. Gracias a este teorema podemos ahondar en el concepto de campo solenoidal. Antes dijimos que las líneas de cualquier campo que verifique que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ han de ser forzosamente cerradas. Utilizando el teorema de la divergencia, este es un resultado sencillo de entender, ya que para estos campos, su flujo a través de cualquier superficie cerrada ha de ser nulo, por lo que las líneas de campo que entran han de salir también, y por lo tanto sus líneas de campo son cerradas.

Teorema del rotacional: Sea de nuevo \vec{A} un campo vectorial, y sean S una superficie abierta cualquiera y C el contorno cerrado que limita a dicha superficie. Se verifica la siguiente relación.

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} \quad (1.7)$$

A partir de este teorema se puede deducir una importante relación. Consideremos el caso en el que \vec{A} es un campo conservativo ($\vec{A} = \nabla \phi$). Entonces, según la expresión 1.5, tendremos que.

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.8)$$

E introduciendo esto en la expresión 1.7.

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.9)$$

Y como esto tiene que cumplirse sea cual sea la superficie abierta S , llegamos a la conclusión de que.

$$\vec{A} = \nabla\phi \implies \nabla \times \vec{A} = 0 \quad (1.10)$$

Es sencillo ver que aplicando la misma lógica, pero partiendo de que $\nabla \times \vec{A} = 0$ se puede llegar a la relación inversa. Por lo tanto.

$$\vec{A} = \nabla\phi \iff \nabla \times \vec{A} = 0 \quad (1.11)$$

1.3. Teorema de Helmholtz

Este teorema será de gran importancia en el desarrollo axiomático del electromagnetismo, ya que establece que si se conocen los valores de la divergencia y el rotacional de un campo vectorial en una determinada región finita, entonces ese campo está unívocamente determinado en el interior de dicha región. Supongamos entonces que \vec{F} es un campo vectorial, y que para el interior de una región finita contenida en una superficie cerrada S y que delimita un volumen τ , conocemos la divergencia y el rotacional de \vec{F} .

$$\nabla \cdot \vec{F} = \alpha(\vec{r}) \quad (1.12)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \beta(\vec{r}) \quad (1.13)$$

Ahora podemos definir las siguientes funciones.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\alpha(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (1.14)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\beta(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (1.15)$$

A partir de estas funciones es posible obtener el campo \vec{F} , que vendrá dado por.

$$\vec{F} = \nabla \times \vec{A} - \nabla\phi \quad (1.16)$$

Así pues, a partir de ahora sabemos que conocer la divergencia y el rotacional del campo electromagnético en todo el espacio nos permite calcular su valor en cualquier punto.

Capítulo 2

Electrostática en el vacío

Comenzaremos este tema introduciendo el concepto de carga eléctrica. La carga, que denotaremos con la letra Q , es una propiedad de la materia. Los fenómenos electromagnéticos surgen de las interacciones entre varias distribuciones de carga. No obstante, es necesario aclarar a que nos estamos refiriendo cuando hablamos de distribuciones de carga, ya que es un hecho conocido que la carga está cuantizada. Esto quiere decir que existe una cantidad fundamental de carga, la carga del electrón ($e^- = -1,602 \cdot 10^{-19} C$). Así pues, para cualquier objeto, su carga se podrá expresar como.

$$Q = n \cdot |e^-|, n \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

Al estar la carga cuantizada, y como desde el punto de vista clásico el electrón se comporta como un punto material, rigurosamente no se puede definir una distribución continua de carga. Sin embargo, si trabajamos con volúmenes lo suficientemente grandes como para contener un gran número de partículas portadoras de carga (lo cual es razonable, ya que generalmente trabajamos a escalas muy superiores a la atómica), podremos considerar que existen las distribuciones continuas de carga. Para llegar a ellas, comenzaremos considerando la siguiente función discreta.

$$\rho_{discreta} = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad (2.2)$$

Si ahora tomamos el límite $\Delta V \rightarrow 0$, con la distinción de que ΔV sigue siendo lo suficientemente grande desde un punto de vista microscópico, llegamos a la definición de la densidad volumétrica de carga.

$$\rho_v = \frac{dQ}{dV} \quad (2.3)$$

De forma totalmente análoga se pueden deducir las expresiones para las densidades lineales y superficiales de carga.

$$\rho_s = \frac{dQ}{ds} \quad (2.4)$$

$$\rho_l = \frac{dQ}{dl} \quad (2.5)$$

De estas tres ecuaciones se desprende que, conocida la densidad de carga, la carga total vendrá dada por.

$$Q = \int_v \rho_v dv \quad (2.6)$$

$$Q = \int_S \rho_s ds \quad (2.7)$$

$$Q = \int_L \rho_l dl \quad (2.8)$$

2.1. El campo electrostático

Experimentalmente se comprueba que al introducir una carga q en una región donde exista campo eléctrico, esta experimenta una fuerza \vec{F} . El vector campo eléctrico, \vec{E} , se define como.

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad (2.9)$$

El motivo de hacer tender a cero el valor de q es porque de esta manera se garantiza que esta carga "de prueba" no está perturbando el campo electrostático presente en esa región. Por supuesto, si conocemos el valor del campo electrostático podremos conocer el valor de la fuerza que experimentará una carga q en el interior del campo.

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (2.10)$$

Como ya hemos visto durante la introducción, para conocer un campo nos llega con saber el valor de su divergencia y su rotacional. Los dos postulados básicos de la electrostática en el espacio libre, obtenidos a partir de la evidencia experimental y del trabajo de físicos como Maxwell, son precisamente la divergencia y el rotacional del campo electrostático.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Donde $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} F/m$ es la permeabilidad dieléctrica del vacío. A partir de estas dos ecuaciones es posible obtener todas las relaciones electrostáticas en el espacio libre.

2.1.1. La ley de Gauss

Fijémonos en la ecuación que nos da el valor de la divergencia de \vec{E} , e integremos ambos miembros en un volumen arbitrario τ que está delimitado por una superficie cerrada S .

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_v dv \quad (2.12)$$

Si ahora utilizamos el teorema de la divergencia en el primer miembro de esta igualdad, obtenemos la siguiente expresión para el flujo del campo \vec{E} .

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_v dv \quad (2.13)$$

Y si recurrimos a la expresión 2.6, el segundo miembro no es más que la carga total encerrada en el volumen τ . Sustituyendo, llegamos a la expresión de la ley de Gauss.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (2.14)$$

Esta ecuación pone de manifiesto que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada tan solo depende de la cantidad de carga que se encuentra en su interior, no de la distribución de la misma. Para ciertos escenarios con un elevado nivel de simetría es posible emplear este resultado para calcular el campo eléctrico.

Ejemplo: Campo eléctrico generado por una carga puntual

Consideremos una carga puntual q en el vacío. Estamos frente a una situación con simetría esférica, ya que mientras nos mantengamos a una cierta distancia de la carga, veremos lo mismo sea cual sea el ángulo respecto a unos ciertos ejes centrados en la carga. Así pues, por la simetría del problema podremos afirmar lo siguiente acerca del campo creado por la carga puntual.

$$\vec{E} = |\vec{E}|(r) \hat{r} \quad (2.15)$$

Si ahora consideramos una corteza esférica de radio R centrada en el origen de coordenadas, podemos calcular de forma simple el flujo del campo eléctrico a través de esa superficie.

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S |\vec{E}|(R) \hat{r} \cdot d\vec{s} = \int_S |\vec{E}|(R) ds \quad (2.16)$$

Como sabemos que el módulo de \vec{E} ha de ser constante en toda la superficie esférica puede salir de la integral.

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = |\vec{E}| \int_S ds = 4\pi R^2 |\vec{E}| \quad (2.17)$$

Ahora podemos utilizar la ecuación 2.14 para llegar a lo siguiente

$$4\pi R^2 |\vec{E}| = \frac{q}{\epsilon_0} \implies |\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2.18)$$

Y ahora, sin más que utilizar 2.15 llegamos a la forma del vector campo eléctrico.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r} \quad (2.19)$$

Ejemplo: Campo eléctrico generado por un plano infinito

Consideremos un plano infinito dotado de una distribución superficial de carga $\rho_s = cte > 0$. Si escogemos un sistema de ejes tal que el plano es perpendicular al eje OZ , es claro que el campo eléctrico solo podrá depender de la coordenada z , ya que al ser el plano infinito, tenemos simetría en x e y . En cuanto al sentido del campo, este irá en dirección $+OZ$ si $z > 0$ y en dirección $-OZ$ si $z < 0$. Consideremos ahora la siguiente superficie.

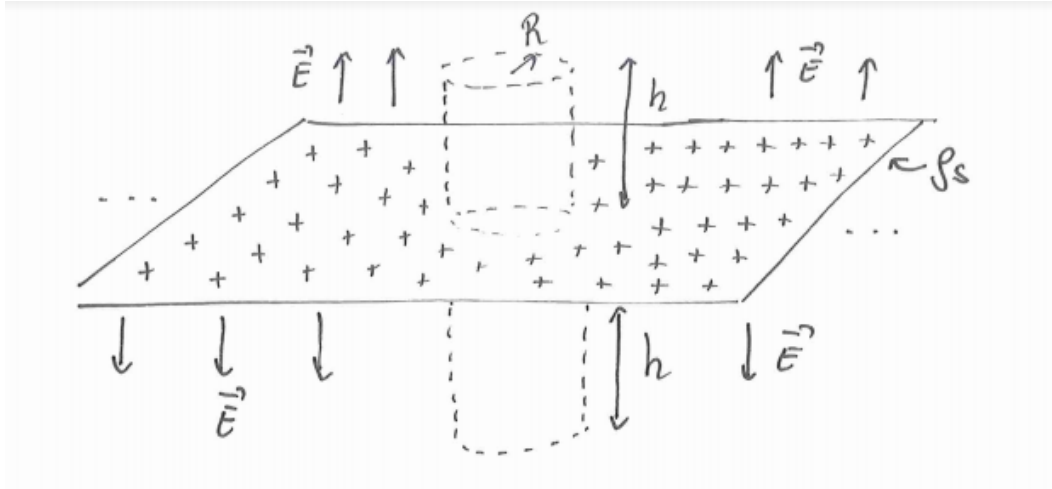


Figura 2.1: Plano infinito cargado positivamente y superficie cilíndrica de radio R y altura $2h$

Ahora, calculemos el flujo Φ del campo eléctrico a través de la superficie cilíndrica de la figura.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{Lateral} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{Tapa\ superior} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{Tapa\ inferior} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.20)$$

Ahora bien, como se puede ver en el dibujo, el campo eléctrico es perpendicular a $d\vec{s}$ en la tapa lateral, y paralelo en las tapas superior e inferior. Así pues, podemos escribir el flujo como.

$$\Phi = \int_{Tapa\ superior} E ds + \int_{Tapa\ inferior} E ds \quad (2.21)$$

Por la simetría del problema, como ambas tapas están a la misma distancia h del plano, los campos en cada tapa son constantes e iguales entre si (en módulo). De esta manera, podemos sacarlos fuera de la integral.

$$\Phi = E(h) \left(\int_{Tapa\ superior} ds + \int_{Tapa\ inferior} ds \right) \quad (2.22)$$

Evaluando estas integrales.

$$\Phi = 2\pi R^2 E(h) \quad (2.23)$$

Por otro lado, la carga encerrada en el interior de la superficie será el producto de la superficie de plano que está en el interior del cilindro y de la densidad superficial de carga.

$$Q_{enc} = \rho_s \pi R^2 \quad (2.24)$$

Y ahora, utilizando la ley de Gauss, podemos relacionar el flujo con la carga encerrada.

$$2\pi R^2 E(h) = \frac{\rho_s \pi R^2}{\epsilon_0} \quad (2.25)$$

De donde obtenemos que el módulo del campo eléctrico en función de la distancia al plano, a la que ahora nos referiremos como z es.

$$E(z) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \quad (2.26)$$

Que resulta no depender de la distancia al plano (esto se debe a que estamos considerando que este es infinito). El vector campo eléctrico será.

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{z} & Si\ z > 0 \\ -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{z} & Si\ z < 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

2.1.2. Funciones de potencial del campo electrostático

Los postulados de la electrostática nos especifican el valor de la divergencia y del rotacional del campo electrostático en el espacio libre. Según el teorema de Helmholtz, esto nos permite conocer de manera unívoca el campo eléctrico. Para ello, calcularemos las funciones 1.14 y 1.15.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\alpha(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\nabla \cdot \vec{E} dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho_v(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (2.28)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\beta(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\nabla \times \vec{E} dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0 \quad (2.29)$$

Para distribuciones superficiales y lineales de carga las expresiones son análogas, cambiando solo el tipo de distribución de carga y las dimensiones del recinto de integración. A la función $\phi(\vec{r})$ se la conoce como potencial escalar eléctrico, y siguiendo la expresión 1.16 el campo electrostático se puede calcular de la siguiente manera.

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (2.30)$$

Si en la expresión anterior sustituimos el potencial dado por el teorema de Helmholtz

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\int_{\tau} \frac{\rho_v(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right) \quad (2.31)$$

Ahora, si nuestras funciones son lo suficientemente bien comportadas, podemos introducir el gradiente en la integral

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \nabla \left(\frac{\rho_v(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (2.32)$$

Ahora, teniendo en cuenta que para el operador gradiente, las coordenadas primadas actúan como constantes, llegamos a la expresión integral para el campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho_v(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dv' \quad (2.33)$$

Como apunte, en el caso de que estemos ante un conjunto de N cargas puntuales y no de una distribución continua de carga, el potencial escalar eléctrico se puede calcular como.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|} \quad (2.34)$$

Del que se deriva de forma sencilla la siguiente expresión, conocida como la ley de Coulomb

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k (\vec{r} - \vec{r}'_k)}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|^3} \quad (2.35)$$

Un detalle importante que destacar acerca del potencial escalar es que no está completamente determinado, sino que infinitos potenciales distintos pueden dar lugar a un mismo campo eléctrico. Para comprobar esto consideremos el siguiente potencial.

$$\phi' = \phi + \xi \quad (2.36)$$

Donde ξ es una constante arbitraria. El campo generado por este nuevo potencial se puede calcular tomando el gradiente de ϕ'

$$\vec{E}' = -\nabla\phi' = -\nabla\phi - \nabla\xi = -\nabla\phi = \vec{E} \quad (2.37)$$

Por lo tanto no tiene sentido hablar del valor del potencial eléctrico en un determinado punto. Lo que sí que tiene interés es la diferencia de potencial entre dos puntos. A continuación discutiremos brevemente su significado físico. Para ello consideraremos la circulación de \vec{E} a través de una curva \mathcal{C} que une dos puntos a y b. Por definición, esta circulación será

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\vec{r} \quad (2.38)$$

Utilizando el teorema del gradiente, podemos escribir esta integral en términos de los valores del potencial en los puntos a y b

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \phi(a) - \phi(b) \quad (2.39)$$

Si multiplicamos ambos lados por una carga q y utilizamos la expresión 2.10 podemos relacionar esta circulación con el trabajo realizado por la fuerza electrostática, W.

$$\int_{\mathcal{C}} q\vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W = q(\phi(a) - \phi(b)) \quad (2.40)$$

O lo que es lo mismo.

$$\phi(b) - \phi(a) = -\frac{W}{q} \quad (2.41)$$

Es decir, la diferencia de potencial entre dos puntos a y b es el trabajo por unidad de carga que hay que realizar en contra del campo eléctrico para mover una cierta carga de un punto a otro.

2.1.3. Ecuaciones de Poisson y de Laplace

Ahora introduciremos por primera vez dos ecuaciones en derivadas parciales de gran importancia, y que analizaremos en mayor detalle a lo largo del temario. Partiendo de los postulados de la electrostática en el espacio libre, podemos obtener las siguientes relaciones.

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \implies \vec{E} = -\nabla\phi \quad (2.42)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \nabla\phi = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \quad (2.43)$$

E introduciendo el operador laplaciano llegamos a la ecuación de Poisson.

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0} \quad (2.44)$$

Y para las regiones del espacio en las que no exista carga, se verificará la forma homogénea de la ecuación de Poisson, la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (2.45)$$

2.2. Teorema de Earnshaw

2.2.1. Condiciones para un equilibrio estable

Sea una región del espacio libre donde existe un determinado potencial electrostático $\phi(\vec{r})$. Si tenemos en cuenta que $\vec{E} = -\nabla\phi$, el campo electrostático apuntará hacia los mínimos de potencial. De esta manera, para que una carga positiva se encuentre en equilibrio, es necesario que esta esté situada en un mínimo local de $\phi(\vec{r})$, mientras que para una carga negativa, se requiere un máximo local.

2.2.2. Formulación y demostración del teorema

Teorema: Sea una región del espacio libre donde existe un potencial electrostático que obedece la ecuación de Laplace. Para todos los extremos de este potencial, estos serán puntos de ensilladura.

Demostración: Los extremos de la función potencial cumplen todos ellos que el gradiente de la misma se anula ($\nabla\phi = 0$). Ahora bien, estos extremos en principio pueden ser máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura. Para analizar la naturaleza de estos extremos construimos la matriz Hessiana en cada uno de los puntos.

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Esta es una matriz simétrica de números reales, y por lo tanto es una matriz Hermítica ($\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger$). El teorema espectral nos garantiza entonces que la matriz es diagonalizable, y que además todos sus autovalores serán reales. Sean entonces $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ los autovalores de esta matriz. Si los tres son positivos (negativos), entonces el punto en cuestión es un mínimo (máximo). En el caso de que tengan distintos signos, el punto será de ensilladura. Fijémonos ahora en la traza de la matriz Hessiana, que sabemos que coincide con la suma de los autovalores de la misma.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \nabla^2\phi = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (2.47)$$

Como hemos asumido que en la región de interés, el potencial verifica la ecuación de Laplace, tendremos que.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (2.48)$$

Ahora bien, esta suma es incompatible con que todos los autovalores sean positivos o que todos sean negativos, por lo que es imposible encontrar un máximo o mínimo local, siendo todos los extremos puntos de ensilladura¹.

2.2.3. Regiones provistas de carga

Hemos visto lo que ocurre en las regiones donde se verifica la ecuación de Laplace, pero sería interesante ver lo que ocurre en las regiones que posean carga en su interior, donde sabemos que se verifica la ecuación de Poisson (2.44). En este caso, el razonamiento es exactamente el mismo que el anterior. Construyendo la matriz Hessiana y calculando su traza, obtenemos que.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{\rho_v(P)}{\epsilon_0} \quad (2.49)$$

Donde P es el punto donde estamos evaluando la matriz Hessiana. Ahora la suma de los autovalores no es necesariamente igual a cero, por lo que se presentan tres casos.

Caso 1. $\rho_v(P) > 0$: En este caso, está permitido que los tres autovalores sean negativos, lo que haría que P fuese un máximo. Por otro lado, sería imposible alcanzar un mínimo, ya que la suma de tres cantidades positivas no puede ser negativa. Por supuesto, aunque sea posible obtener un máximo, sigue siendo posible que P sea un punto de ensilladura.

Caso 2. $\rho_v(P) < 0$: Ahora, como la suma de autovalores es positiva, está permitido que todos ellos sean positivos, y por tanto que P sea un mínimo.

Caso 3. $\rho_v(P) = 0$: Si $\rho_v = 0$ en P, entonces en ese punto el potencial verifica la ecuación de Laplace, y por el teorema de Earnshaw, P tan solo puede ser un punto de ensilladura.

2.2.4. Significado físico

Como ya hemos visto, para tener una situación de equilibrio estable es necesario que el potencial en un punto tenga un máximo o un mínimo. Así pues, el teorema de Earnshaw nos dice que, en regiones en las que no exista carga, es imposible alcanzar un equilibrio estable utilizando tan solo fuerzas electrostáticas. Por otro lado, en regiones cargadas positivamente (negativamente), tan solo las cargas negativas (positivas) pueden estar en situación de equilibrio estable.

2.3. El dipolo eléctrico.

Un dipolo eléctrico es un sistema formado por dos cargas puntuales con cargas opuestas q y -q. Tanto el campo como el potencial generado por estos objetos será de gran importancia más adelante, así que dedicaremos esta sección a calcularlo. Consideremos pues el siguiente modelo del dipolo eléctrico.

¹Estamos ignorando el caso degenerado, en el que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. En este caso la argumentación que hemos realizado no sería suficiente, y habría que construir el tensor de terceras derivadas para analizar el comportamiento del potencial. Es posible demostrar que el teorema se sigue cumpliendo, pero excede el nivel de este curso

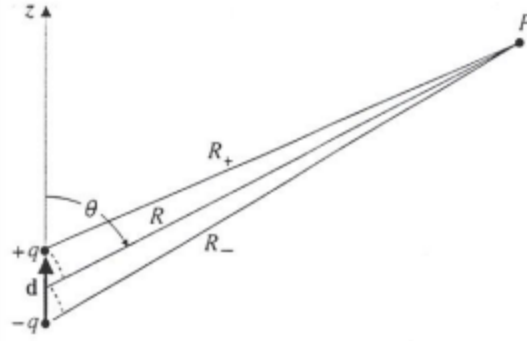


Figura 2.2: Dipolo eléctrico

Para calcular el potencial en un punto arbitrario P en función de R_+ y R_- , no hay más que utilizar la ecuación 2.34, llegando a la siguiente expresión.

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) \quad (2.50)$$

Si ahora consideramos que P está lo suficientemente alejado del dipolo como para considerar que $d \ll R$, podemos tomar las siguientes aproximaciones.

$$R_+ \approx R - \frac{d}{2} \cos \theta \quad (2.51)$$

$$R_- \approx R + \frac{d}{2} \cos \theta \quad (2.52)$$

Sustituyendo esto en la expresión 2.50, llegamos a que

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\left(R - \frac{d}{2} \cos \theta\right)} - \frac{1}{\left(R + \frac{d}{2} \cos \theta\right)} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d \cos \theta}{R^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta} \right) \quad (2.53)$$

Y si ahora tenemos en cuenta de nuevo que, al trabajar en puntos lejanos al dipolo, $d \ll R$, podemos ignorar el término $R^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta$ frente a R^2 , y llegamos a la expresión del potencial creado por un dipolo en puntos alejados del mismo.

$$\phi \approx \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2.54)$$

Y finalmente, si introducimos el vector momento dipolar eléctrico como $\vec{p} = q\vec{d}$, el potencial será.

$$\phi = \frac{\vec{p} \cdot \hat{R}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2.55)$$

Y para calcular el campo eléctrico generado por el dipolo no hay más que aplicar el gradiente en coordenadas esféricas.

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial R}\hat{r} - \frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 R^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (2.56)$$

2.4. Expansión multipolar del potencial escalar eléctrico

Consideremos una distribución arbitraria de carga, y preguntémonos cuanto vale el potencial eléctrico en puntos muy alejados de esa distribución. Si la carga total de nuestra

distribución es q , una buena aproximación sería considerar el potencial creado por una carga puntual, ya que a estas distancias, la distribución se puede considerar como puntual. Tendríamos entonces que

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{2.57}$$

Pero que ocurre si la carga total de nuestra distribución es nula? Claramente el potencial no puede ser nulo, ya que como vimos en la sección anterior, un dipolo de carga total nula genera un potencial no nulo. Podríamos entonces considerar la distribución de carga como dos cargas puntuales q y $-q$, y considerar el potencial creado por este dipolo, lo que generaría un potencial como el de la ecuación 2.55, que es proporcional a $\frac{1}{r^2}$

Al hacer esta aproximación, estamos despreciando las interacciones entre agrupaciones de más de dos cargas. Tal y como hicimos para el dipolo, sería posible calcular el potencial creado por un cuadrupolo (que sería proporcional a $\frac{1}{r^3}$), de un octopolo...

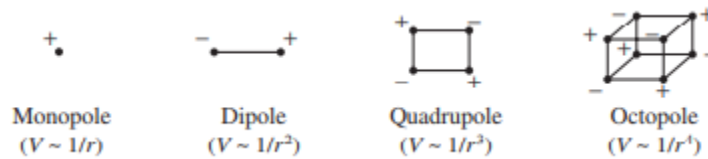


Figura 2.3: Esquemas de un monopolo, dipolo, cuadrupolo y octopolo

Nuestro objetivo es hallar una expresión para el potencial en puntos alejados de la distribución de carga tal que tenga en cuenta las interacciones entre n-polos de un orden que, en principio, puede ser tan grande como queramos. Para ello, consideremos la expresión del potencial escalar eléctrico

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_v(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \tag{2.58}$$

Para mayor comodidad, sea $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}'|$, como se indica en la siguiente figura

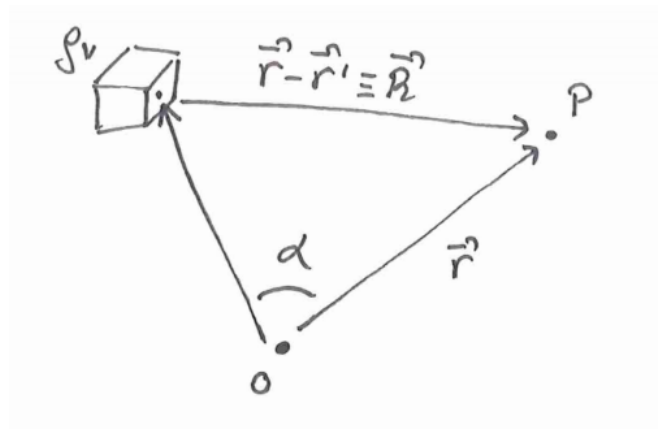


Figura 2.4: Representación de la situación, donde el punto P está lo suficientemente alejado de la distribución de carga

Ahora, se puede utilizar el teorema del coseno para relacionar distintas cantidades

$$R^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \alpha \tag{2.59}$$

O lo que es lo mismo

$$R^2 = r^2 \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \alpha \right) \quad (2.60)$$

Tomando la raíz cuadrada de ambos miembros llegamos a que

$$R = r\sqrt{1+x} \quad (2.61)$$

Donde hemos definido x como

$$x \equiv \frac{r'}{r} \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \alpha \right) \quad (2.62)$$

Ahora consideremos la siguiente expresión

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad (2.63)$$

Para puntos muy alejados de la distribución de carga, $x \ll 1$, así que podemos expandir esta función en serie de Taylor en torno a $x=0$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots \right) \quad (2.64)$$

Si ahora se sustituye el valor de x y se reordenan términos, se llega a la siguiente expresión

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \alpha + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} \right) + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{5 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}{2} \right) + \dots \right] \quad (2.65)$$

Las funciones de α son algo conocido, los polinomios de Legendre², que se recogen en la siguiente tabla.

n	0	1	2	3
$P_n(\mu)$	1	μ	$\frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$

Cuadro 2.1: Polinomios de Legendre

Podemos entonces expresar la inversa de R en función de los polinomios de Legendre

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \alpha) \quad (2.66)$$

E introduciendo esto en la expresión del potencial escalar eléctrico

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_v(\vec{r}') \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \alpha) dv' \quad (2.67)$$

Y reorganizando términos

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{\tau} (r')^n \rho_v(\vec{r}') P_n(\cos \alpha) dv' \quad (2.68)$$

A esta expresión se la conoce como la expansión multipolar del potencial escalar. Si desarrollamos el sumatorio podemos encontrar términos proporcionales a r^{-n} , con $n > 1$. Estos

²Estos polinomios se estudian en MMIV como las soluciones a la ecuación diferencial de Legendre

son los términos monopolar, dipolar, cuadripolar y superiores. Desarrollemos por ejemplo el término dipolar

$$\phi_{dip}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{\tau} r' \cos \alpha \rho_v(\vec{r}') dv' \quad (2.69)$$

Ahora, utilizando que $r' \cos \alpha = \hat{r} \cdot \vec{r}'$, podemos reescribir este término como

$$\phi_{dip}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \int_{\tau} \vec{r}' \rho_v(\vec{r}') dv' \quad (2.70)$$

Comparando esta ecuación con la expresión 2.55, podemos identificar el vector momento dipolar con

$$\vec{p} = \int_{\tau} \vec{r}' \rho_v(\vec{r}') dv' \quad (2.71)$$

De forma totalmente análoga es posible deducir expresiones para los momentos cuadripolares, octopolares...³

En general, la expansión multipolar del potencial escalar es muy útil para hallar expresiones aproximadas para el potencial, ya que basta con considerar la distribución de carga como una carga puntual e ir añadiendo términos correctores (dipolar, cuadripolar...), hasta que se alcance el grado de precisión requerido. Esto es posible debido a que, cuanto más compleja sea la interacción entre cargas, más se atenuará con la distancia.

2.5. La función delta de Dirac

Vamos a introducir esta función⁴ a partir de una aparente contradicción, viendo como nos sirve para solucionarla. De esta manera, consideremos el siguiente campo vectorial

$$\vec{v} = \frac{A\hat{r}}{r^2} \quad (2.72)$$

Donde A es una constante. Se puede ver claramente que tiene la forma del campo eléctrico generado por una carga puntual predicho por la ley de Coulomb (ecuación 2.35). Si ahora calculamos la divergencia de este campo

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{A}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (A) = 0 \quad (2.73)$$

Consideremos ahora un volumen τ limitado por una superficie esférica S centrada en el origen y de radio R. Según el teorema de la divergencia

$$\int_{\tau} (\nabla \cdot \vec{v}) dv = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (2.74)$$

Según el cálculo de la divergencia que acabamos de realizar, el primer miembro de la igualdad ha de ser nulo

$$\int_{\tau} (\nabla \cdot \vec{v}) dv = 0 \quad (2.75)$$

Pero al evaluar el segundo miembro

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_S v(r=R) ds = \frac{A}{R^2} \oint_S ds = 4\pi A \neq 0 \quad (2.76)$$

Hemos llegado a una aparente contradicción, y es que hemos cometido un fallo, sutil pero importante, a la hora de calcular la divergencia. Para ver el problema, recordemos que la

³Destacar que el momento monopolar sería simplemente la carga total de la distribución.

⁴Realmente, la delta de Dirac no es una función en el sentido usual, sino que se trata de una función generalizada o distribución, y se discute formalmente en Métodos Matemáticos VI.

divergencia de un campo se relaciona con la existencia de fuentes y sumideros de dicho campo

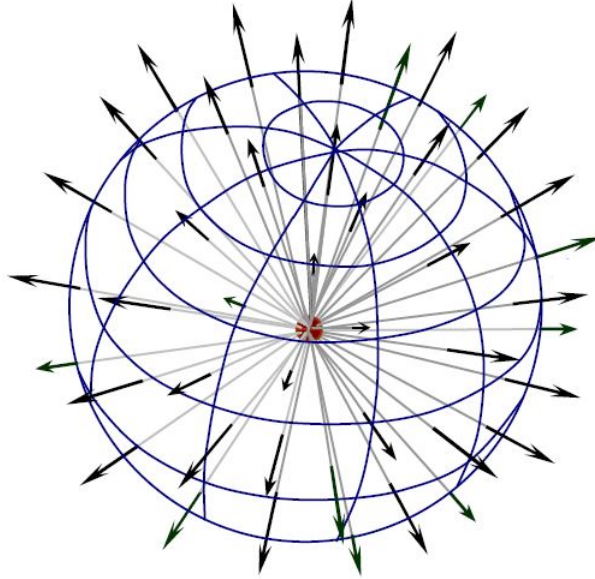


Figura 2.5: Representación del campo \vec{v} (con $A > 0$) y de la superficie S

Según el cálculo que hemos realizado antes, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, o lo que es lo mismo, el campo \vec{v} no tiene ni fuentes ni sumideros en todo el espacio, algo que es claramente falso, ya que como se puede ver en la figura 2.5, el campo \vec{v} tiene claramente una fuente en el origen, donde además dicho campo diverge. El problema viene de que no estamos teniendo en cuenta el origen en el cálculo de esta divergencia.

Para hacerlo es necesario utilizar la función delta de Dirac. En estos apuntes no la introduciremos formalmente, sino que daremos una idea intuitiva suficiente para su uso en electromagnetismo. Así pues, definimos la delta como

$$\delta(x - a) \equiv \begin{cases} 0 & \text{Si } x \neq a \\ \infty & \text{Si } x = a \end{cases} \quad (2.77)$$

Esta función tiene dos propiedades clave para el desarrollo que haremos a continuación. La primera es que está normalizada

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1 \quad (2.78)$$

La segunda de estas propiedades es muy intuitiva si pensamos que la delta se anula en todos los puntos excepto en $x=a$

$$f(x) \delta(x - a) = f(a) \delta(x - a) \quad (2.79)$$

Combinando estas dos propiedades

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = f(a) \quad (2.80)$$

Por supuesto, esto es en el caso unidimensional, mientras que nuestro problema es tridimensional. Por este motivo, definimos la delta tridimensional como

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) \equiv \delta(x - \vec{r}_0 \cdot \hat{x}) \delta(y - \vec{r}_0 \cdot \hat{y}) \delta(z - \vec{r}_0 \cdot \hat{z}) \quad (2.81)$$

Esta delta tridimensional también está normalizada

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) dx^3 = 1 \quad (2.82)$$

Ahora, volviendo al problema inicial, podemos proponer la siguiente expresión para la divergencia de \vec{v} , que no solo se anula en todos los puntos que no sean el origen, sino que es consistente con un campo infinito en dicho punto

$$\nabla \cdot \vec{v} = 4\pi A \delta^3(\vec{r}) \quad (2.83)$$

Que si se integra en el volumen τ nos da un resultado compatible con el teorema de la divergencia

$$\int_{\tau} 4\pi \delta^3(\vec{r}) dv = 4\pi A \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(\vec{r}) = 4\pi A \quad (2.84)$$

Donde hemos tenido en cuenta que $\delta(\vec{r})$ es nula en el exterior de τ .

Ahora que la delta de Dirac está introducida, consideremos el campo eléctrico generado por una carga puntual situada en el origen, que viene dado por la ley de Coulomb (ecuación 2.35

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (2.85)$$

Si tomamos su divergencia

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{q\hat{r}}{r^2} \right) \quad (2.86)$$

El término entre paréntesis es el campo \vec{v} con $A=q$, por lo que su divergencia se podrá escribir en función de la delta de Dirac

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (4\pi q \delta^3(\vec{r})) = \frac{q \delta^3(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (2.87)$$

Y si ahora recordamos el segundo postulado de la electrostática

$$\frac{q \delta^3(\vec{r})}{\epsilon_0} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \implies \rho_v = q \delta^3(\vec{r}) \quad (2.88)$$

Esto nos está indicando que es posible escribir una densidad volumétrica de carga asociada a una carga puntual a través de la delta de Dirac, que le da estructura matemática a la idea de que en un punto exista una densidad infinita.

Podemos pensar en generalizar la expresión anterior a un conjunto de N cargas puntuales. La expresión más lógica parece ser la siguiente

$$\rho_v(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.89)$$

Veamos si esta expresión es correcta. Partamos de la expresión 2.33 e introduzcamos esta nueva noción de densidad volumétrica de carga

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho_v(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dv' = \int_{\tau} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \sum_{i=1}^N q_i \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (2.90)$$

Para mayor claridad en el siguiente paso, vamos a introducir todos los términos en el sumatorio

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (2.91)$$

Recordemos ahora la propiedad de la delta de Dirac dada por la ecuación 2.79. Según dicha propiedad, el campo eléctrico será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} dv' \quad (2.92)$$

Utilizando la linealidad de la integral, podemos sacar el sumatorio, así como los términos que son constantes, fuera de la misma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \int_{\tau} \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_i) dv' \quad (2.93)$$

Como todas las cargas están situadas dentro del volumen τ , la integral de la delta tridimensional es la unidad, y por lo tanto el campo eléctrico será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (2.94)$$

Que es la ley de Coulomb. De esta manera, hemos demostrado que, en efecto, la densidad volumétrica asociada a un conjunto de cargas puntuales se puede escribir en función de la delta tridimensional según la ecuación 2.89.

Para finalizar, cabe destacar que así como hemos asignado una densidad volúmica de carga a un conjunto de cargas puntuales, es posible hacer lo mismo para distribuciones de carga lineales y superficiales, como se puede ver en las siguientes imágenes.

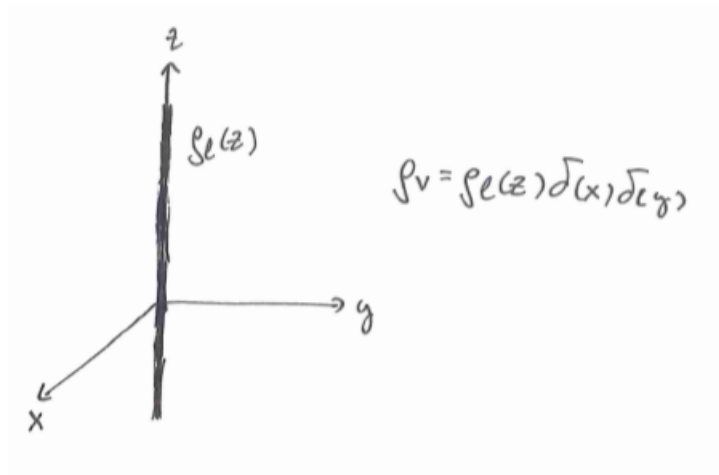


Figura 2.6: Densidad lineal de carga situada sobre el eje Z, y su densidad volumétrica asociada en términos de la función delta de Dirac.

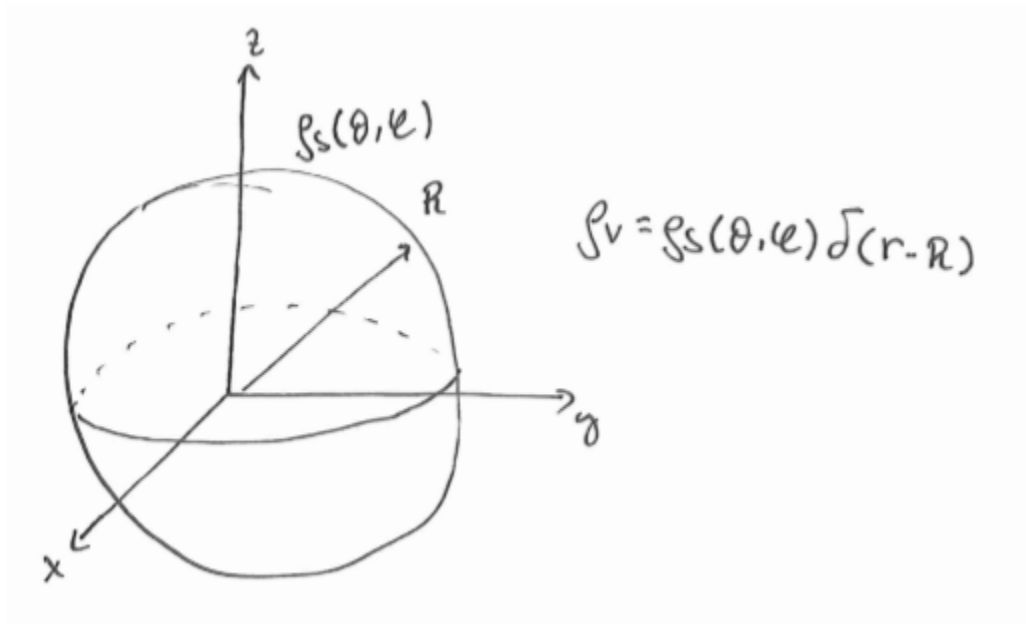


Figura 2.7: Corteza esférica de radio R donde se encuentra una densidad superficial de carga. La función $\delta(r - R)$ es nula en todo el espacio excepto en los puntos que, en coordenadas esféricas, cumplen que $r=R$, donde su valor tiende a infinito.

En resumen, dada una carga puntual o una distribución no volúmica de carga, se le puede asociar una distribución volúmica de carga, $\rho_v(\vec{r})$, sin más que multiplicar la distribución inicial de carga por una delta de Dirac apropiada, que sea nula en todos los puntos en los que no exista carga.

Capítulo 3

Electrostática en medios materiales

Hasta ahora hemos estudiado el campo electrostático en el espacio libre (el vacío), pero en la realidad existen una gran cantidad de medios en los que puede existir un campo electrostático y que no son el vacío, los llamados medios materiales. A lo largo de este tema nos centraremos principalmente en los conductores y en los dieléctricos, estudiando el comportamiento del campo \vec{E} en el interior y en la superficie de los mismos, y viendo como su presencia modifica los postulados de la electrostática en el espacio libre.

3.1. Conductores en equilibrio electrostático

Definimos un conductor como una región del espacio que posee carga libre (que se puede mover sin restricciones ante la presencia de un campo eléctrico). Durante toda esta sección asumiremos que las cargas se encuentran en sus posiciones en el equilibrio. Analicemos entonces las propiedades de estas regiones.

Para empezar, en el interior de un conductor en equilibrio electrostático, el campo eléctrico ha de anularse, ya que de lo contrario las cargas ya no estarían libres, sino que estarían sujetas a la acción de un campo. Como además sabemos que $\vec{E} = -\nabla\phi$, si $\vec{E} = 0$, entonces $\phi = cte$, y por lo tanto los conductores en equilibrio electrostático son volúmenes equipotenciales. El hecho de que el campo eléctrico se anule en el interior de los conductores nos permite saber como se distribuye la carga en estas regiones. Supongamos pues un conductor genérico como el que se representa en la figura.

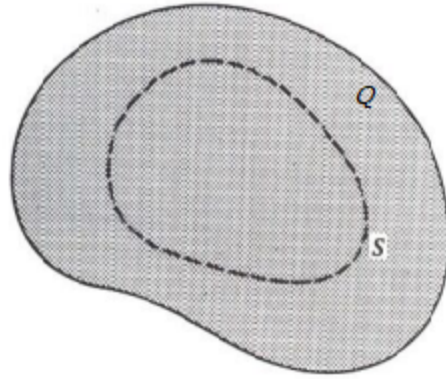


Figura 3.1: Conductor en equilibrio electrostático cargado con una carga total Q

Hemos llegado a la conclusión de que el campo en el interior del conductor es nulo, por lo que el flujo del campo electrostático a través de la superficie S será cero también, y por lo tanto la carga encerrada en su interior. Utilizando la ley de Gauss, como esto es válido para cualquier superficie cerrada contenida completamente en el conductor, la carga almacenada en el interior del mismo será cero, y toda ella estará distribuida en la superficie del conductor. Centrémonos ahora en esta superficie. El campo eléctrico en esta zona tendrá dos componentes, una normal a la superficie del conductor, y una tangencial.

$$\vec{E} = E_n \hat{n} + E_t \hat{t} \quad (3.1)$$

Ahora bien, como las cargas en el conductor han de estar en equilibrio, la componente tangencial ha de anularse, ya que de no hacerlo las cargas se moverían por la superficie del conductor. Así pues, el campo electrostático será siempre normal a la superficie de un conductor. Podemos utilizar la ley de Gauss para hallar el valor de este campo normal si consideramos la siguiente situación.

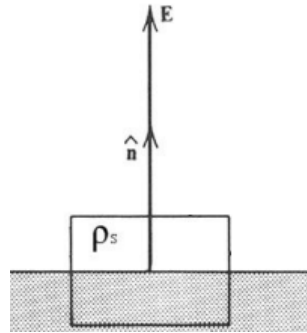


Figura 3.2: Superficie de un conductor en equilibrio electrostático

Esta es una representación de cualquier punto de un conductor arbitrario, lo suficientemente cercano a la superficie como para poder aproximar esta localmente como un plano. Así pues, tenemos que el campo eléctrico es normal a la superficie del conductor, y que este solo existe en el exterior. Si calculamos el flujo, Φ .

$$\Phi = \int_{Superior} \vec{E}_n \cdot \hat{n} ds + \int_{Inferior} \vec{E}_{int} \cdot \hat{n} ds + \int_{Lateral} \vec{E}_t \cdot \hat{n} ds \quad (3.2)$$

Pero como ya hemos visto, tanto el campo interno como el tangencial han de ser nulos.

$$\Phi = \int_{Superior} \vec{E}_n \cdot \hat{n} ds \quad (3.3)$$

Si ahora ΔS es el área de la tapa superior, y sabiendo que al ser esta muy pequeña, podemos considerar que el campo \vec{E} es constante en todos los puntos de esta tapa, el flujo será.

$$\Phi = \vec{E}_n \Delta S \quad (3.4)$$

Si ahora recurrimos a la ley de Gauss, sabemos que este flujo será igual a.

$$\Phi = \vec{E}_n \Delta S = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (3.5)$$

Reorganizando términos, y utilizando que $\frac{Q_{enc}}{\Delta S} = \rho_s$, llegamos a la expresión del campo en los puntos de la superficie de un conductor en equilibrio electrostático.

$$\vec{E}_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (3.6)$$

3.1.1. Blindaje utilizando conductores

A continuación veremos como es posible aislar ciertas regiones del espacio de los efectos del campo eléctrico utilizando conductores en equilibrio electrostático. En primer lugar, consideremos la siguiente situación.

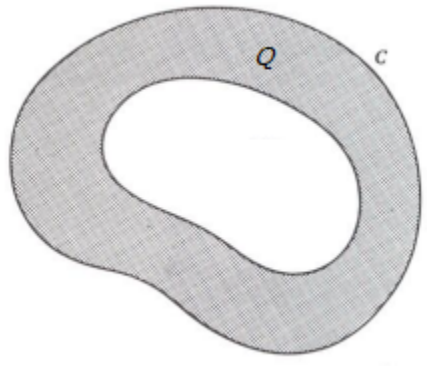


Figura 3.3: Conductor hueco cargado con una carga Q

En la cavidad interior de este conductor, el campo ha de ser forzosamente cero. Esto es sencillo de deducir utilizando la ley de Gauss, ya que para toda superficie cerrada que esté totalmente contenida en la cavidad, la carga encerrada en su interior (y por lo tanto el flujo del campo eléctrico a través de esta superficie) es nula. Como esto ha de ser cierto para cualquier superficie cerrada, el campo en el interior tiene que ser cero, independientemente de las posibles cargas situadas en el exterior del conductor. Además de este caso simple, podemos tener situaciones más complejas.

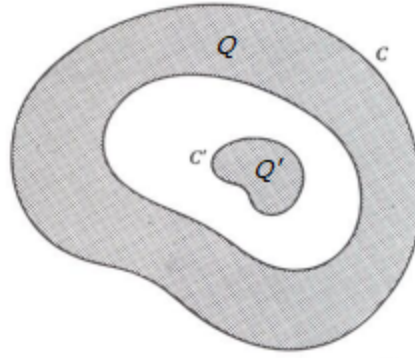


Figura 3.4: Conductor horadado con otro conductor en su interior.

En primer lugar, sabemos que en el interior de los conductores C y C' (las zonas sombreadas) no puede existir campo eléctrico por tratarse de conductores en equilibrio electrostático. Por otro lado, en la región entre conductores existirá campo eléctrico si y solo si $Q' \neq 0$. Si se da este caso, existirán superficies cerradas contenidas en la región entre conductores que contengan carga en su interior, por lo que la ley de Gauss impone que existirá un flujo no nulo del campo eléctrico a través de dichas superficies, forzando así la existencia de campo eléctrico en esta región. En la zona exterior, utilizando argumentos idénticos, existirá campo eléctrico si y solo si $Q + Q' \neq 0$.

3.1.2. La jaula de Faraday

Este es un caso específico de blindaje utilizando conductores, y es completamente análogo a la situación en la figura 3.3. Buscamos aislar una cierta región del espacio de los efectos de un campo eléctrico externo, así que la rodeamos de un conductor en equilibrio electrostático, que garantiza que todo campo en el interior de la jaula de Faraday se deberá a cargas situadas en el interior de la misma. Tendremos entonces la siguiente situación.

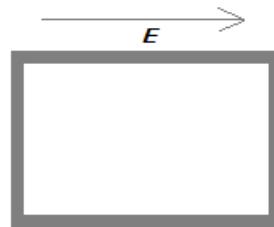


Figura 3.5: Esquema de la jaula de Faraday y del campo eléctrico externo

Ya sabemos que el campo en el interior será nulo, pero aprovecharemos para discutir el efecto del campo eléctrico sobre la distribución de carga en la superficie de la jaula. En ausencia de cargas en el interior de la jaula, esta carga se situará en la superficie más externa, y si hacemos la suposición de que la jaula es un cuerpo neutro, cuando no exista campo externo la densidad superficial de carga será cero en todos los puntos del conductor. Sin embargo, cuando se encienda el campo externo, las cargas en la jaula se reagruparán de tal manera que creen un campo tal que, al superponerse al campo externo en el interior de la jaula, provoquen que no exista campo en esta región.

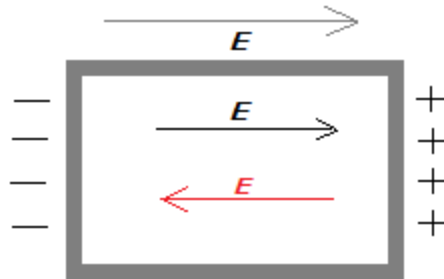


Figura 3.6: Redistribución de cargas y superposición de campos en el interior. En rojo se representa el campo generado por la distribución de cargas del conductor, y en negro el campo externo. Estos dos campos se cancelan en el interior de la jaula

3.1.3. El efecto punta

Consideremos la situación que se muestra en la siguiente figura

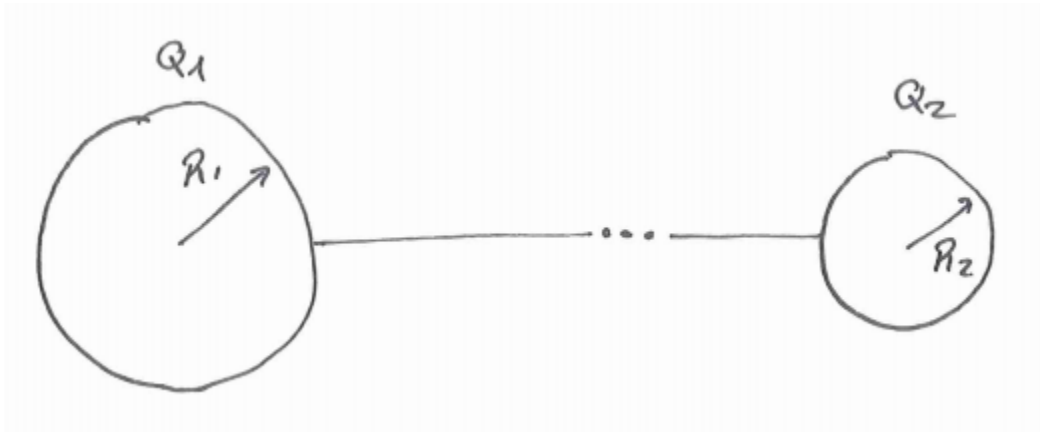


Figura 3.7: Dos esferas conductoras conectadas entre sí por un hilo

Si asumimos que el hilo que conecta las dos esferas es lo suficientemente largo, podemos afirmar que el campo generado por una de ellas no afectará al de la otra de manera significativa. En esta situación, una vez se alcance el equilibrio electrostático, cada esfera tendrá una carga Q_i homogéneamente distribuida a lo largo de su superficie (de nuevo, suponiendo que las dos esferas están lo suficientemente alejadas). El potencial en la superficie de cada esfera es sencillo de calcular

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1 \epsilon_0} \quad (3.7)$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2 \epsilon_0} \quad (3.8)$$

Ahora bien, las dos esferas forman un único conductor (ya que están conectadas por el hilo), así que deben estar al mismo potencial, de lo que se deduce

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \quad (3.9)$$

Si ahora pensamos en la densidad de carga de cada esfera, esta será

$$\rho_{s1} = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \quad (3.10)$$

$$\rho_{s2} = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} \quad (3.11)$$

El cociente entre estas dos densidades superficiales será

$$\frac{\rho_{s1}}{\rho_{s2}} = \frac{Q_1 R_2}{Q_2 R_1} \frac{R_2}{R_1} \quad (3.12)$$

Utilizando la relación 3.9, podemos escribir este cociente como

$$\frac{\rho_{s1}}{\rho_{s2}} = \frac{R_2}{R_1} < 0 \quad (3.13)$$

Y por lo tanto, llegamos a que

$$\rho_{s2} > \rho_{s1} \quad (3.14)$$

Vemos entonces que se acumula una mayor densidad superficial de carga de carga en la región con más curvatura (menor radio). Esto es lo que se conoce como efecto punta, que es más complicado de demostrar para geometrías arbitrarias¹. En general, para un conductor cualquiera, en el que existe una densidad superficial de carga ρ_s , esta será mayor en aquellas zonas con mayor curvatura.

Este es el principio del pararrayos, que consiste en un conductor con una punta muy estrecha, donde la densidad superficial de carga será mucho mayor, maximizando así la probabilidad de que un rayo caiga en dicha punta.

3.2. Medios dieléctricos

A diferencia de los conductores, los medios dieléctricos no poseen carga libre, sino que sus electrones están ligados a sus posiciones en cierta medida. De este modo, cuando a un dieléctrico se le aplica un campo externo, el movimiento que se les permite a las cargas es muy pequeño, y en vez de encontrarnos frente a una redistribución de la densidad de carga, como en el caso de los conductores, lo que ocurre es que el dieléctrico se polariza, ya que cada una de las moléculas que lo compone adquiere un momento dipolar, al redistribuirse ligeramente su densidad electrónica. Como ya hemos visto en el tema anterior, un dipolo eléctrico genera su propio campo, y este también es el caso para las moléculas de los dieléctricos, que aunque individualmente generan campos muy débiles, en conjunto se pueden sumar para dar lugar a un efecto macroscópico. Definimos entonces el vector polarización como.

$$\vec{P} \equiv \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \vec{p}_k}{\Delta v} \quad (3.15)$$

Donde los \vec{p}_k son los momentos dipolares de cada una de las moléculas contenidas en un volumen Δv , y n es el número de moléculas por unidad de volumen en el dieléctrico. Cuando el dieléctrico no está sometido a ningún campo externo, los dipolos de sus moléculas están distribuidos al azar, por lo que la suma vectorial de todos ellos será prácticamente nula, y no producirá efectos macroscópicos. No obstante, al someter al material a un campo electrostático externo, los dipolos de sus moléculas tenderán a alinearse, dando lugar a un vector polarización no nulo.

3.2.1. Densidades de carga de polarización

Vamos a calcular el campo creado por los dipolos inducidos en el dieléctrico. Para ello, consideraremos la forma diferenciada de la ecuación 2.55, considerando también que nuestro dipolo puede no estar situado en el origen, sino en un punto con un vector de posición \vec{r}' .

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.16)$$

¹Ver [2], sección 3.4

Para calcular el potencial en el punto con vector de posición , no hay más que integrar esta expresión en todo el volumen τ ocupado por el dieléctrico.

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\tau} \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int_{\tau} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (3.17)$$

Donde se ha utilizado que, a partir de la ecuación 3.15.

$$d\vec{p}(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}') dV' \quad (3.18)$$

Ahora, teniendo en cuenta la siguiente identidad vectorial.

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.19)$$

Podemos reescribir el potencial como.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \quad (3.20)$$

Ahora, utilizando esta otra identidad vectorial.

$$\vec{A} \cdot \nabla' f = \nabla' \cdot (f\vec{A}) - f\nabla' \cdot \vec{A} \quad (3.21)$$

Tendremos que el potencial se puede expresar como la suma de dos integrales.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.22)$$

Si ahora S es la superficie que delimita la región dieléctrica, podemos utilizar el teorema de la divergencia en la primera integral para llegar a.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.23)$$

Recordemos que estamos calculando el campo generado por los dipolos situados en el interior del dieléctrico, y hemos sido capaces de expresar este campo como la suma de dos integrales. Comparándolas con la ecuación 2.28, vemos que son exactamente iguales, donde las densidades de carga superficial y volumétrica son.

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (3.24)$$

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (3.25)$$

A estas densidades de carga se las conoce como densidades de carga de polarización o densidades de carga ligada, y surgen debido a la inducción de dipolos en el material dieléctrico. A la hora de calcular los campos, hay que tenerlas en cuenta a mayores de las densidades de carga libres que puedan existir. Finalmente, es importante destacar que, según el principio de conservación de la carga, si el dieléctrico es inicialmente neutro (antes de aplicar el campo externo), entonces la carga total de polarización debe de ser nula.

$$\oint_S \rho_{ps} dS + \int_{\tau} \rho_{pv} dV = 0 \quad (3.26)$$

3.2.2. El vector desplazamiento eléctrico

Como ya hemos visto, en un sistema en el que se encuentre un dieléctrico, "aparecen" ciertas cargas a mayores de las cargas libres, a las que llamamos cargas ligadas o de polarización, y que tienen que ser tenidas en cuenta en cuanto al cálculo de los campos. Así pues, el primer postulado de la electrostática se convierte en.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v + \rho_{pv}}{\epsilon_0} \quad (3.27)$$

Cualitativamente, esto quiere decir que el campo \vec{E} nace y muere tanto en las distribuciones de carga libre como en las distribuciones de carga ligada. No obstante, nos gustaría contar con un campo que no dependa de las distribuciones de carga de polarización, y para obtenerlo, podemos manipular la expresión anterior para llegar a.

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} - \rho_{pv} = \rho_v \quad (3.28)$$

Y utilizando la ecuación 3.24.

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_v \quad (3.29)$$

Definimos entonces el vector desplazamiento eléctrico, \vec{D} , como.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.30)$$

Cuya divergencia depende únicamente de las cargas libres. Esto sin embargo tiene un precio, y es que el rotacional de \vec{D} ya no es nulo. En efecto, aplicando el rotacional a ambos miembros de la ecuación anterior, y aplicando el segundo postulado de la electrostática.

$$\nabla \times \vec{D} = \epsilon_0 \nabla \times \vec{E} + \nabla \times \vec{P} = \nabla \times \vec{P} \neq 0 \quad (3.31)$$

3.2.3. El tensor susceptibilidad eléctrica

Existen ciertos materiales, llamados materiales lineales, en los que el vector polarización y el campo eléctrico están relacionados de la siguiente manera.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e(\vec{r}) \vec{E} \quad (3.32)$$

Donde χ_e es el tensor susceptibilidad dieléctrica del material en cuestión, que se puede representar como una matriz 3×3 cuyas componentes (que son adimensionales) dependen de la posición. En forma matricial, la ecuación 3.32 toma la siguiente forma.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{e11}(\vec{r}) & \chi_{e12}(\vec{r}) & \chi_{e13}(\vec{r}) \\ \chi_{e21}(\vec{r}) & \chi_{e22}(\vec{r}) & \chi_{e23}(\vec{r}) \\ \chi_{e31}(\vec{r}) & \chi_{e32}(\vec{r}) & \chi_{e33}(\vec{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Existen medios que además de ser lineales, son también isotrópicos. En estos medios, el tensor susceptibilidad eléctrica se vuelve diagonal y con tres autovalores idénticos, por lo que la expresión 3.32 tomaría la forma.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e(\vec{r}) \vec{E} \quad (3.34)$$

Donde ahora χ_e no es un tensor, sino una función escalar que depende de la posición. Finalmente, en los medios que además de lineales e isotrópicos son homogéneos, esta función de la posición se convierte en una constante.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (3.35)$$

Si nos ponemos en el caso de medios lineales, homogéneos e isotrópicos (l.h.i), la expresión 3.30 se convierte en.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (3.36)$$

Donde $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ es una cantidad adimensional conocida como la permitividad relativa del medio, y $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ es la permitividad absoluta (o permitividad) del medio en cuestión, y se mide en F/m .

3.3. Condiciones de contorno en la separación entre medios

Dedicaremos esta sección al estudio del comportamiento de las distintas componentes de los campos \vec{E} y \vec{D} al pasar de un medio a otro.

3.3.1. Continuidad de las componentes tangenciales de \vec{E}

Consideremos la superficie de separación entre dos medios y el contorno $abcd$ indicado en la figura.

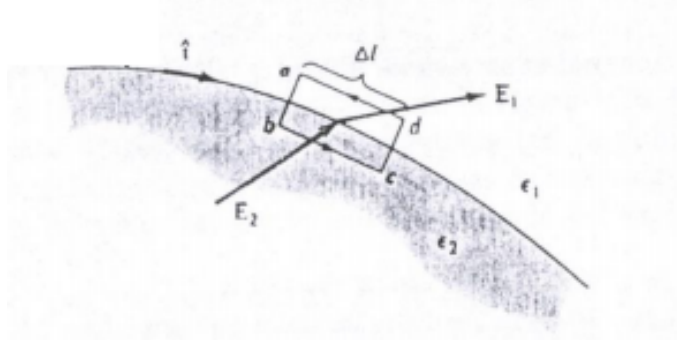


Figura 3.8: Superficie de separación entre dos medios con distintas permitividades absolutas, ϵ_1 y ϵ_2

Según el segundo postulado de la electrostática, $\nabla \times \vec{E} = 0$, y utilizando el teorema del gradiente.

$$\oint_{abcd} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (3.37)$$

Ahora, consideremos que tomamos el límite en el que los tramos \bar{ab} y \bar{cd} tienden a cero, mientras que los otros dos permanecen iguales. En este caso tendríamos que.

$$\lim_{\bar{ab}, \bar{cd} \rightarrow 0} \oint_{abcd} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (3.38)$$

Si ahora Δl es la distancia entre a y d (que coincide con la distancia entre b y c), y puesto que los diferenciales en cada integral tienen sentidos opuestos.

$$\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \Delta l \cdot \hat{t} = 0 \quad (3.39)$$

Donde \hat{t} es un vector unitario tangente a la superficie de separación entre los dos medios. Manipulando la expresión anterior es posible deducir una relación entre las componentes tangenciales de \vec{E} en los dos medios.

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (3.40)$$

Es decir, las componentes tangenciales de \vec{E} se conservan al cambiar de un medio a otro.

3.3.2. Discontinuidad en las componentes normales de \vec{D}

Consideremos de nuevo una frontera entre dos medios de distintas permitividades absolutas, en la que existe una distribución superficial de carga libre, y consideremos también la superficie indicada en la figura.

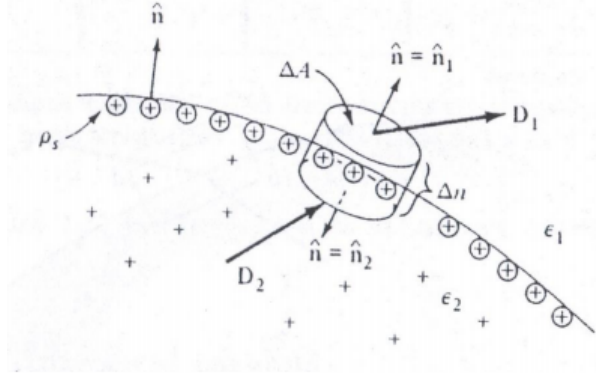


Figura 3.9: Separación entre dos medios de distintas permitividades absolutas

Hemos demostrado anteriormente que la divergencia de \vec{D} es la densidad de carga libre. Así pues, si calculamos el flujo de este campo a través de la superficie de la figura, a la que podemos llamar S .

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{D} dV = \int_{\tau} \rho_v dV \quad (3.41)$$

Consideremos ahora que la altura del cilindro, Δn tiende a cero. Aplicando este límite tendríamos que.

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \int_{\tau} \rho_v dV = \int_{\Gamma} \rho_s dS \quad (3.42)$$

Donde ahora Γ es la superficie de separación entre los medios que está en el interior del cilindro. Si ahora tenemos en cuenta que $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$, podemos expresar el primer límite como.

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\Gamma} (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{n}_1 dS \quad (3.43)$$

Juntando ambas ecuaciones, obtenemos que.

$$\int_{\Gamma} (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{n}_1 dS = \int_{\Gamma} \rho_s dS \quad (3.44)$$

Y como los recintos de integración son iguales, los integrandos han de serlo también.

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{n}_1 = \rho_s \quad (3.45)$$

Y desarrollando el producto escalar llegamos a la expresión de la discontinuidad de las componentes normales de \vec{D} .

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (3.46)$$

3.4. Ecuaciones de Poisson y Laplace en medios dieléctricos

En el tema anterior dedicamos una sección a introducir las ecuaciones de Poisson y de Laplace para el campo electrostático en el espacio libre. Veamos como se modifican estas ecuaciones en medios dieléctricos. En primer lugar, sabemos que sigue aplicando el segundo postulado de la electrostática en el espacio libre ($\nabla \times \vec{E} = 0$), por lo que \vec{E} sigue siendo un campo conservativo, y por lo tanto deriva de un potencial escalar a través de un gradiente.

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (3.47)$$

Si consideramos medios lineales e isotropos, contamos con la siguiente igualdad, que ya hemos deducido anteriormente.

$$\vec{D} = \epsilon(\vec{r}) \vec{E} \quad (3.48)$$

Nótese que la permeabilidad absoluta es una función de la posición y no una constante, ya que no hemos especificado que estemos trabajando con medios homogéneos. Si combinamos ambas ecuaciones, llegamos a que.

$$\vec{D} = -\epsilon(\vec{r}) \nabla \phi \quad (3.49)$$

Tomando la divergencia a ambos lados, y aplicando que $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$, tenemos que.

$$\nabla \cdot (\epsilon(\vec{r}) \nabla \phi) = -\rho_v \quad (3.50)$$

Si desarrollamos el primer medio de la igualdad, llegamos a la ecuación diferencial que verifica el potencial eléctrico en medios lineales e isotropos.

$$\nabla \epsilon(\vec{r}) \cdot \nabla \phi + \epsilon(\vec{r}) \nabla^2 \phi = -\rho_v \quad (3.51)$$

Si ahora admitimos que el medio es homogéneo, la permitividad deja de depender de la posición y se convierte en una constante, y de esta manera obtenemos la ecuación de Poisson.

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (3.52)$$

Que para regiones en las que no exista carga libre, se reduce a la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.53)$$

Llegamos entonces a la conclusión de que el potencial escalar eléctrico en medios dieléctricos obedece las ecuaciones de Laplace o de Poisson si y solo si el medio es lineal, homogéneo e isotropo. En caso de medios inhomogéneos, la ecuación diferencial es la dada por 3.51.

3.5. El electreto

Un electreto es un cilindro homogéneo hecho de material dieléctrico en el que existe una polarización uniforme.

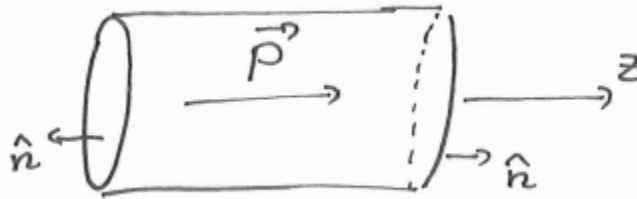


Figura 3.10: Electreto en el que existe una polarización uniforme $\vec{P} = P\hat{z}$. No existen distribuciones de carga libre

Vamos a calcular las fuentes de los campos \vec{E} y \vec{D} . En primer lugar, al no haber carga libre, tendremos que

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{pv}}{\epsilon_0} \quad (3.54)$$

Las densidades de carga de polarización serán

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P} = 0 \quad (3.55)$$

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n} = \pm P \quad (3.56)$$

Tendremos entonces una densidad de carga superficial de polarización negativa en la tapa izquierda y una positiva en la derecha. Como $\nabla \times \vec{E} = 0$, estas densidades superficiales son las únicas fuentes de \vec{E} , que tendrá, de manera cualitativa, la siguiente forma

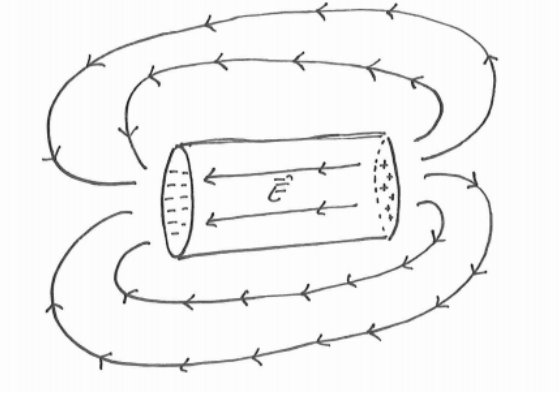


Figura 3.11: Líneas del campo eléctrico. Estas líneas "nacen" en las cargas positivas y "mueren" en las negativas.

Veamos ahora lo que le ocurre al campo \vec{D} . Para ello, recordemos la definición de este campo, dada por 3.30

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.57)$$

En el exterior del electreto, donde $\vec{P} = 0$, las líneas de \vec{E} y \vec{D} coinciden, ya que

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \implies \vec{D} \parallel \vec{E} \quad (3.58)$$

Ahora bien, sabemos que, al no haber distribuciones de carga libre, $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, lo que nos indica que las líneas de \vec{D} tienen que ser cerradas. Así, las líneas de campo del vector desplazamiento eléctrico serán

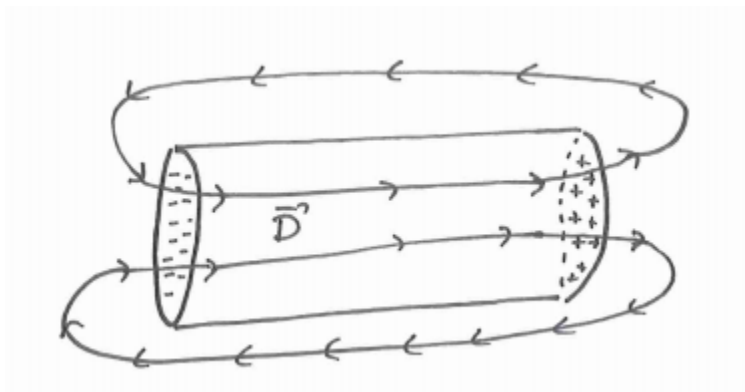
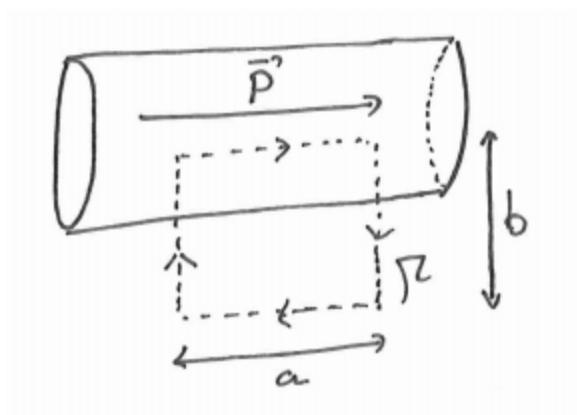


Figura 3.12: Líneas del campo \vec{D}

Visto este resultado, es razonable preguntarse por que existe campo \vec{D} si sus fuentes se anulan $\nabla \cdot \vec{D} = 0$. Si bien esto es cierto, nos estamos olvidando de sus fuentes vectoriales, ya que $\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}$. Sea ahora el camino Γ detallado en la siguiente figura.

Figura 3.13: Camino cerrado Γ

Consideremos ahora la siguiente integral

$$\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} \quad (3.59)$$

Como el vector de polarización se anula fuera del electreto, y es perpendicular a $d\vec{r}$ en los tramos verticales, esta integral se reduce a

$$\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_0^a \vec{P} \cdot d\vec{r} = P \int_0^a dr = aP \neq 0 \quad (3.60)$$

Tenemos entonces que la integral de \vec{P} en un camino cerrado es no nula, y por lo tanto \vec{P} no puede ser un campo conservativo. De esta manera, sabemos que $\nabla \times \vec{P} \neq 0$, por lo que existen fuentes vectoriales de \vec{D} .

Capítulo 4

Energía y fuerzas electrostáticas.

Hasta ahora, hemos desarrollado la electrostática a través de los dos postulados en el espacio libre y en medios dieléctricos, llegando a calcular el potencial y el campo eléctricos en varias situaciones. En este tema nos centraremos en las energías electrostáticas, relacionándolas con los distintos campos que ya hemos introducido, y finalmente relacionaremos estas energías con las fuerzas electrostáticas.

4.1. Energía de configuración de un sistema de cargas puntuales

Consideremos una carga puntual q_1 situada en un punto del espacio libre caracterizado por un vector de posición \vec{r}_1 . Imaginemos que ahora desplazamos una segunda carga q_2 desde el infinito hasta otro punto del espacio libre, caracterizado por otro vector de posición \vec{r}_2 . Definimos la energía de configuración de este sistema de dos cargas como el trabajo necesario para transportar la carga q_2 desde el infinito hasta su posición final¹. Si $V_1(\vec{r})$ es la función potencial generada por la carga q_1 , el teorema del gradiente nos garantiza que.

$$W_2 = q_2 \Delta V = q_2 (V_1(\vec{r}_2) - V_1(\infty)) \quad (4.1)$$

Recordemos que estamos considerando el trabajo realizado en contra del campo, de ahí la ausencia del signo menos en la ecuación 4.1. Además, como el potencial escalar es nulo en el infinito.

$$W_2 = q_2 V_1(\vec{r}_2) \quad (4.2)$$

Si ahora denotamos como r_{12} a la distancia entre \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , y sustituyendo la expresión del potencial creado por una carga puntual.

$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (4.3)$$

Si ahora quisiéramos traer otra carga, q_3 , desde el infinito hasta una posición marcada por el vector de posición \vec{r}_3 , tendríamos que hacer trabajo contra el campo creado por las cargas q_1 y q_2 . Si ahora $V_{12}(\vec{r})$ es el potencial creado por las cargas q_1 y q_2 , el trabajo necesario para trasladar q_3 será.

$$W_3 = q_3 V_{12}(\vec{r}_3) = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) \quad (4.4)$$

¹Es importante darse cuenta de que no estamos imponiendo ninguna restricción acerca de la trayectoria de q_2 desde el infinito hasta \vec{r}_2 , ya que el hecho de que $\nabla \times \vec{E} = 0$ hace que el trabajo realizado no dependa del camino seguido.

Y para colocar una cuarta carga, q_4 , el proceso es análogo.

$$W_4 = \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}} \right) \quad (4.5)$$

Para hallar la energía total de configuración del sistema de cuatro cargas no hay más que hacer la suma.

$$W = \sum_i W_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right) \quad (4.6)$$

A partir de esta expresión, se puede generalizar para obtener la energía de configuración de un sistema de N cargas puntuales.

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (4.7)$$

Donde el índice $j = i + 1$ impide sumar el mismo par dos veces. Existe también la posibilidad de sumar pares repetidos y dividir entre dos, lo que nos deja con.

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (4.8)$$

Esta expresión resulta ser más útil, ya que se puede manipular para obtener.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right) \quad (4.9)$$

El término entre paréntesis es exactamente el potencial electrostático generado por todas las cargas menos una en el punto donde se encuentra esa última carga. De esta manera, se puede escribir la energía electrostática de configuración de un sistema de cargas puntuales en función del potencial electrostático generado por todo ese conjunto de cargas.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i) \quad (4.10)$$

Este es el trabajo necesario para situar las N cargas en sus respectivas posiciones, y concide con la cantidad de energía obtenida al romper totalmente la configuración.

4.1.1. Energía almacenada en distribuciones continuas

Es posible generalizar la expresión 4.10 a distribuciones continuas de carga, ya sean volumétricas, lineales o superficiales, sin más que sustituir las cargas puntuales por las respectivas densidades de carga, y reemplazando la suma por una integral que se extiende a las regiones del espacio donde existe carga.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} V(\vec{r}') \rho_v dv' \quad (4.11)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_S V(\vec{r}') \rho_s ds' \quad (4.12)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_L V(\vec{r}') \rho_l dl' \quad (4.13)$$

4.2. Energía electrostática en términos de cantidades de campo

Las expresiones que acabamos de deducir nos permiten calcular la energía electrostática almacenada en cualquier tipo de distribución de cargas, siempre que conozcamos como está distribuida (la función densidad). No obstante, a veces obtener esta función es complicado, y es más cómodo tener una expresión para la energía que solo dependa de los campos \vec{E} y \vec{D} . Para ello, y partiendo de la expresión 4.11.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} V(\vec{r}') \rho_v dv' = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\nabla \cdot \vec{D}) V(\vec{r}') dv' \quad (4.14)$$

Si ahora utilizamos la siguiente identidad vectorial.

$$\nabla \cdot (V\vec{D}) = \nabla V \cdot \vec{D} + V \nabla \cdot \vec{D} \quad (4.15)$$

Podemos sustituirla en la última integral para obtener.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \nabla \cdot (V\vec{D}) dv' - \frac{1}{2} \int_{\tau} \nabla V \cdot \vec{D} dv' \quad (4.16)$$

Si ahora utilizamos el teorema de la divergencia en la primera integral, y en la segunda sustituimos $\vec{E} = -\nabla V$, llegamos a.

$$W = \frac{1}{2} \oint_S V\vec{D} \cdot d\vec{s}' + \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{E} \cdot \vec{D} dv' \quad (4.17)$$

Fijémonos ahora en la integral de superficie. Como τ puede ser cualquier volumen, es posible escogerlo de forma que sea una esfera de radio R . Si se hace esto, sabemos que la función potencial decrece como $\frac{1}{R}$, y que el módulo del desplazamiento eléctrico decrece como $\frac{1}{R^2}$. Como el elemento de superficie ds aumenta con una razón de R^2 , el conjunto decrece como $\frac{1}{R}$, y por lo tanto.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_S V\vec{D} \cdot d\vec{s}' \asymp \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} = 0 \quad (4.18)$$

Para el otro sumando, al hacer tender R a ∞ , tenemos que integrar sobre todo el espacio, y así.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{Todo el espacio}} \vec{E} \cdot \vec{D} dv' \quad (4.19)$$

Que es equivalente a integrar en todas las regiones donde existan campos no nulos. Si denotamos a la unión de todas estas regiones como Ω , la energía electrostática será.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{D} dv' \quad (4.20)$$

Hasta el momento, el planteamiento ha sido completamente general. Si ahora admitimos que estamos trabajando en medios lineales, homogéneos e isótropos, podemos hacer uso de la relación $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ para describir la expresión anterior.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon E^2 dv' \quad (4.21)$$

Esto puede interpretarse como la integral de una cierta densidad de energía electrostática en un determinado volumen, así que podemos definir esta densidad como.

$$w_e \equiv \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (4.22)$$

De forma que la energía será.

$$W = \int_{\Omega} w_e dv' \quad (4.23)$$

4.2.1. Ejemplo: Energía almacenada en un condensador.

Consideremos un condensador de placas plano-paralelas como el que se muestra en la siguiente figura.

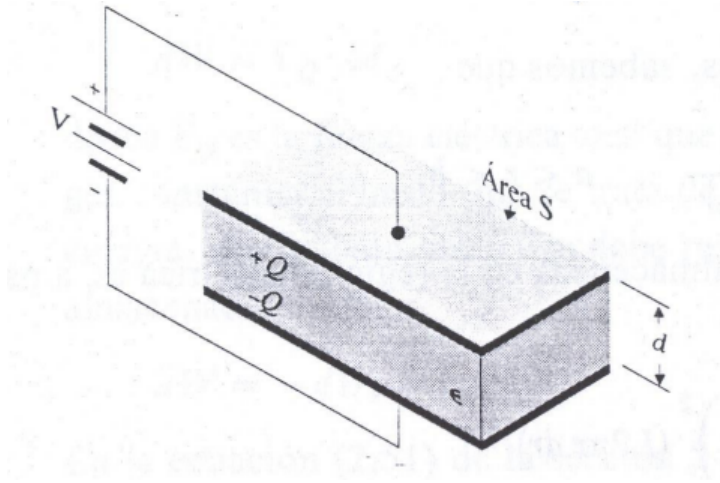


Figura 4.1: Condensador de placas plano-paralelas sometido a una diferencia de potencial V . En su interior hay un medio l.h.i de permitividad absoluta ϵ .

Para modelar el campo eléctrico en el interior de este condensador vamos a utilizar un resultado previo: el campo creado por un plano infinito, dado por 2.27. Si ignoramos efectos de borde, este será el campo generado por cada una de las placas del condensador. Si se tiene en cuenta que las placas tienen densidades de carga con signos opuestos, es sencillo ver que los campos de cada placa se superponen para dar lugar al siguiente campo total.

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{z} & \text{En el interior del condensador} \\ 0 & \text{En el resto del espacio} \end{cases} \quad (4.24)$$

Donde hemos situado el eje z de tal manera que sea perpendicular a las placas del condensador. Además, como conocemos la distribución superficial de carga, el campo en el interior del condensador será.

$$\vec{E}_{int} = \frac{Q}{S\epsilon} \hat{z} \quad (4.25)$$

Hay una manera más simple de expresar este campo eléctrico. Si calculamos la diferencia de potencial entre placas, V .

$$V = \int_0^d \vec{E}_{int} \cdot d\vec{r} = \int_0^d \frac{Q}{S\epsilon} dr = \frac{Qd}{S\epsilon} = E_{int}d \quad (4.26)$$

Y por tanto, el campo eléctrico será.

$$\vec{E}_{int} = \frac{V}{d} \hat{z} \quad (4.27)$$

Y como en el interior tenemos un medio l.h.i, el vector desplazamiento eléctrico en todo el espacio será.

$$\vec{D} = \begin{cases} \epsilon \vec{E}_{int} & \text{En el interior del condensador} \\ 0 & \text{En el resto del espacio} \end{cases} \quad (4.28)$$

Ahora que conocemos los campos, podemos usar la ecuación 4.20 para calcular la energía almacenada en este condensador. Sea pues τ el volumen encerrado entre las placas.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{E} \cdot \vec{D} dv' = \frac{1}{2} \int_{\tau} \epsilon E^2 dv' = \frac{1}{2} \int_{\tau} \epsilon \left(\frac{V}{d} \right)^2 dv' = \frac{1}{2} \frac{SV^2}{d} \epsilon \quad (4.29)$$

Podemos relacionar esta cantidad con la capacidad del condensador, definida como.

$$C \equiv \frac{Q}{V} \quad (4.30)$$

Que, utilizando resultados previos de este apartado.

$$C = Q \cdot \left(\frac{Qd}{S\epsilon} \right)^{-1} = \frac{S\epsilon}{d} \quad (4.31)$$

Y por lo tanto la energía electrostática almacenada se puede expresar como.

$$W = \frac{1}{2} CV^2 \quad (4.32)$$

4.3. Energía de polarización

Cuando introducimos los medios dieléctricos, hablamos de que sus propiedades surgían de una perturbación en la estructura electrónica de sus moléculas al aplicar un campo externo. Evidentemente, dicho cambio requiere de una determinada cantidad de energía, a la que se le conoce como energía de polarización. Para ver esta variación de energía, consideremos un condensador de placas plano-paralelas de capacidad C_0 cuando entre sus placas se encuentra el vacío. Consideremos ahora que introducimos en su interior un material dieléctrico de permitividad relativa ϵ_r . El dieléctrico se polarizará como se muestra en la figura.

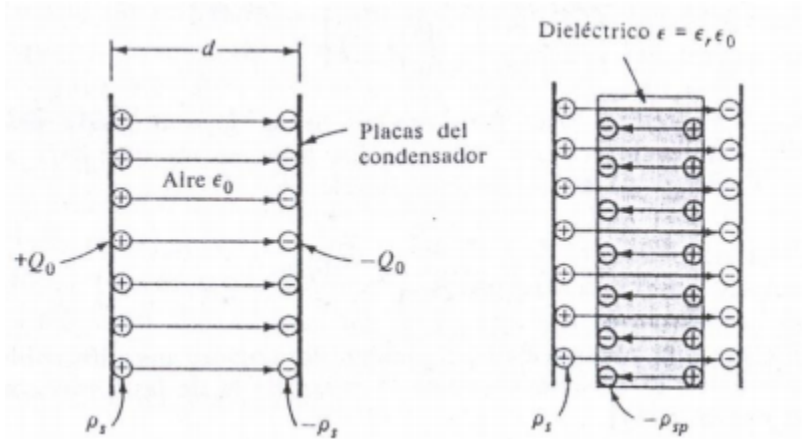


Figura 4.2: Esquema de lo que le ocurre a las cargas en el dieléctrico en el proceso de polarización. Como aclaración, toda la región entre placas está ocupada por el dieléctrico. La superficie de cada placa es S .

Empecemos calculando el valor de los campos \vec{D} y \vec{E} en todo el espacio. Como estamos ante un material dieléctrico, tendremos que las fuentes de \vec{E} serán tanto las cargas libres como las cargas ligadas, mientras que las fuentes del campo \vec{D} son solo las cargas libres, lo que indica que para el campo \vec{D} , no existe ningún material dieléctrico. Volviendo de nuevo

al plano infinito, es sencillo demostrar que el vector desplazamiento eléctrico generado por esa distribución de corriente será.

$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{\rho_s}{2} \hat{z} & \text{Para } z > 0 \\ -\frac{\rho_s}{2} \hat{z} & \text{Para } z < 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

Y siguiendo el mismo razonamiento que en apartados anteriores, para nuestro condensador relleno de material dieléctrico, si despreciamos efectos de borde, el vector desplazamiento eléctrico en todo punto del espacio será.

$$\vec{D} = \begin{cases} \rho_s \hat{z} & \text{En el interior del condensador} \\ 0 & \text{En el resto del espacio} \end{cases} \quad (4.34)$$

Y por lo tanto el campo eléctrico en el interior del condensador será.

$$\vec{E}_{int} = \frac{\rho_s}{\epsilon_r \epsilon_0} \quad (4.35)$$

Po otro lado, el potencial entre las placas del condensador será.

$$V = \int_0^d \vec{E}_{int} \cdot d\vec{r} = Ed \quad (4.36)$$

Si ahora nos preguntamos por la capacidad del condensador ahora que hemos introducido el dieléctrico, tendremos que.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_s S}{V} = \frac{DS}{Ed} \quad (4.37)$$

Si ahora recurrimos a la ecuación 3.30, podemos reescribir la expresión anterior como.

$$C = \frac{(P + \epsilon E) S}{Ed} = \frac{\epsilon S}{d} + \frac{PS}{Ed} \quad (4.38)$$

Vemos entonces que podemos escribir la capacidad del condensador como la suma de dos términos. Ahora, según la ecuación 4.31, podemos identificar el primer término con la capacidad del condensador cuando no hay dieléctrico entre sus placas.

$$C = C_0 + \frac{PS}{Ed} \quad (4.39)$$

Tenemos entonces que la capacidad tiene dos términos, correspondiente a la capacidad en el espacio libre y otro que depende de la polarización. Ahora, utilizando que el medio dieléctrico es l.h.i, podemos utilizar que $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}$ para llegar a.

$$C = C_0 + \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) S}{d} = C_0 + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} - \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (4.40)$$

Que recurriendo de nuevo a la ecuación 4.31 podemos reescribir como.

$$C = C_0 + \epsilon_r C_0 - C_0 = \epsilon_r C_0 \quad (4.41)$$

Veamos ahora la energía almacenada en el condensador. Utilizando la expresión 4.32 sabemos que.

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r C_0 V^2 \quad (4.42)$$

Que también se puede escribir como.

$$W = \frac{1}{2} C_0 V^2 + \frac{1}{2} (\epsilon_r - 1) C_0 V^2 \quad (4.43)$$

4.4. FUERZA ELECTROSTÁTICA ENTRE LAS PLACAS DE UN CONDENSADOR 49

El primer término se corresponde con la energía almacenada en el condensador cuando este está situado en el espacio libre, por lo que el segundo término ha de corresponderse con la energía almacenada en la polarización.

$$W = W_0 + W_{pol} \quad (4.44)$$

Donde

$$W_{pol} = \frac{1}{2} (\epsilon_r - 1) C_0 V^2 = (\epsilon_r - 1) W_0 \quad (4.45)$$

Es inmediato comprobar que para el espacio libre, cuando $\epsilon_r = 1$, la energía de polarización es nula.

4.3.1. Energía de polarización desde el punto de vista del campo

Según la ecuación 4.20, la energía electrostática almacenada en una distribución de cargas viene dada por.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{D} dv' \quad (4.46)$$

Utilizando la ecuación 3.30 para reescribir el campo \vec{D}

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) dv' = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon_0 E^2 dv' + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{P} dv' \quad (4.47)$$

Para medios lineales, homogéneos e isotrópicos, el primer sumando se corresponde con la energía electrostática en el vacío, por lo que el segundo término ha de ser igual a la energía de polarización.

$$W_{pol} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{P} \cdot \vec{E} dv' \quad (4.48)$$

4.4. Fuerza electrostática entre las placas de un condensador

Consideremos de nuevo un condensador de placas plano-paralelas. En cada una de sus placas se encuentra una cantidad de carga con valor absoluto $|Q|$, pero de signos opuestos, por lo que resulta evidente que las caras sentirán una fuerza atractiva, F_e entre ellas. De este modo, para mantener inalterado el condensador será necesaria una fuerza mecánica que contrarreste la atracción electrostática, a la que nos referiremos como F_m .

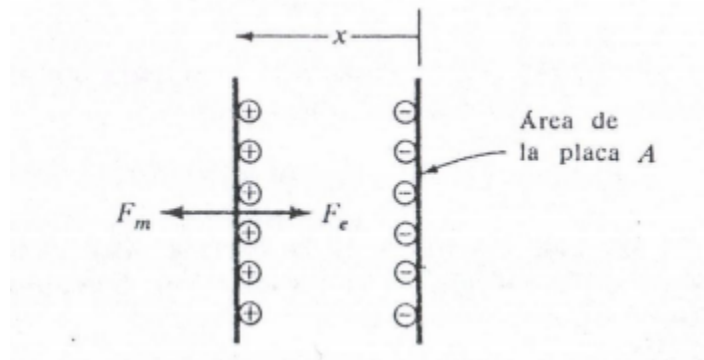


Figura 4.3: Representación de las fuerzas sobre una de las placas.

Consideremos ahora un desplazamiento virtual, Δx de una de las placas, debido a la acción de fuerzas eléctricas (podemos imaginar que lo que está ocurriendo es que retiramos

la fuerza mecánica que mantiene fijas las placas). El trabajo virtual realizado por la fuerza eléctrica será.

$$\Delta W_m = F_e \Delta x \quad (4.49)$$

Ahora tenemos que considerar dos casos, ya que el condensador puede estar o aislado o bien conectado a una fuente de potencial.

4.4.1. Condensador aislado

Consideremos pues un condensador totalmente relleno de un medio l.h.i de permeabilidad absoluta ϵ . Como el condensador está aislado, la energía total del sistema ha de permanecer constante. Esto significa que el trabajo mecánico resultante del desplazamiento virtual debe compensarse con una disminución de la energía electrostática.

$$\Delta W_m + \Delta W_e = 0 \quad (4.50)$$

Despejando y utilizando la ecuación 4.49 llegamos a

$$F_e = -\frac{\Delta W_e}{\Delta x} \quad (4.51)$$

Ahora, si consideramos variaciones infinitesimales, tendremos la siguiente expresión.

$$F_e = -\frac{\partial W_e}{\partial x} \quad (4.52)$$

Veamos entonces cuanto vale esta fuerza. En primer lugar, tenemos que la energía electrostática almacenada en un condensador plano-paralelo es.

$$W_e = \frac{1}{2} CV^2 \quad (4.53)$$

Sin embargo, esta expresión no nos es demasiado útil, ya que un condensador aislado no está conectado a una batería que mantenga constante su voltaje al modificar la distancia entre placas. Por otro lado, al no estar conectado a baterías, no existe nada que modifique la carga almacenada en las caras del condensador, por lo que esta se mantendrá constante. De este modo, utilizando que $C = \frac{Q}{V}$

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} \quad (4.54)$$

Utilizando la ecuación 4.31, podemos escribir la capacidad en función de la distancia ente placas.

$$W_e = \frac{Q^2}{2A\epsilon} x \quad (4.55)$$

Vemos pues que la energía almacenada es mayor cuanto más grande sea la distancia entre las placas. Para obtener la fuerza, no hay más que emplear la ecuación 4.52

$$F_e = -\frac{Q^2}{2A\epsilon} \quad (4.56)$$

Se puede ver que la fuerza tiene un signo negativo, ya que tiende a disminuir la energía almacenada (al intentar juntar las placas del condensador).

4.4.2. Condensador conectado a baterías

Ahora, en lugar de un condensador aislado, tenemos uno conectado a una fuente de energía que permite una variación de carga en las placas, y que mantiene constante la diferencia de potencial entre las mismas. Para hacer el balance de energías, tendremos que

tener en cuenta que ahora el entorno (baterías) puede hacer un trabajo, al que nos referimos como W_b

$$\Delta W_m + \Delta W_e = \Delta W_b \quad (4.57)$$

Recurriendo a la expresión 4.31, es sencillo calcular la variación en la capacidad del condensador cuando las placas se acercan una distancia Δx

$$\Delta C = A\epsilon \left(\frac{1}{x - \Delta x} - \frac{1}{x} \right) = A\epsilon \frac{\Delta x}{x(x - \Delta x)} \quad (4.58)$$

Esta variación de la capacidad lleva asociada una variación de la carga almacenada en las placas (ya que el voltaje es constante).

$$Q = CV \implies \Delta Q = (\Delta C) V \quad (4.59)$$

Y por lo tanto, podremos expresar la variación de energía electrostática en función de esta variación de carga.

$$W_e = \frac{1}{2} QV \implies \Delta W_e = \frac{1}{2} V \Delta Q \quad (4.60)$$

Que en función del desplazamiento de las placas es

$$\Delta W_e = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{x(x - \Delta x)} A\epsilon V^2 \quad (4.61)$$

Por otro lado, tenemos el trabajo realizado por las baterías. Estas transportan una cantidad de carga ΔQ de una placa a otra. De este modo, el trabajo realizado por las baterías vendrá dado por la ecuación 2.41

$$W_b = V \Delta Q = \frac{\Delta x}{x(x - \Delta x)} A\epsilon V^2 \quad (4.62)$$

De esta manera, se comprueba fácilmente que.

$$W_b = 2W_e \quad (4.63)$$

Así, la ecuación 4.57 se convierte en

$$\Delta W_b + \Delta W_e = 2\Delta W_e \quad (4.64)$$

Despejando de esta ecuación, y empleando la expresión 4.49 llegamos a la siguiente expresión para la fuerza.

$$F_e = \frac{\Delta W_e}{\Delta x} \quad (4.65)$$

Y si de nuevo consideramos desplazamientos infinitesimales

$$F_e = \frac{\partial W_e}{\partial x} \quad (4.66)$$

Llegamos a la misma expresión que para el condensador aislado, pero con el signo cambiado. Para estudiar la causa de esto, no hay más que calcular la energía electrostática almacenada, ayudándonos de la ecuación 4.31.

$$W_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{A\epsilon}{x} V^2 \quad (4.67)$$

Ahora la energía aumenta al juntar las placas, y no al contrario, de ahí el cambio de signo. Si ahora sustituimos en la expresión 4.66 podemos calcular la fuerza.

$$F_e = -\frac{1}{2} \frac{A\epsilon}{x^2} V^2 \quad (4.68)$$

Que como es de esperar tiene signo negativo, ya que tiende a unir ambas placas (que en este caso implica un incremento de la energía electrostática almacenada).

4.5. Presión electrostática

Volvamos al caso del condensador plano aislado. Según las ecuaciones 4.56 y 4.32, podemos escribir la fuerza sobre sus placas como.

$$F_e = -\frac{W_e}{x} \quad (4.69)$$

Si ahora introducimos de nuevo la idea de densidad de energía electrostática, y si v es el volumen encerrado entre las placas del conductor, podemos expresar la fuerza como.

$$F_e = -\frac{w_e v}{x} = -\frac{w_e (Ax)}{x} = w_e A \quad (4.70)$$

Y por lo tanto, la fuerza por unidad de superficie, a la que nos referiremos como presión electrostática, será.

$$\frac{F_e}{A} = w_e \equiv f_e \quad (4.71)$$

Vectorialmente, la fuerza sobre las placas será

$$\vec{f}_e = w_e \hat{n} \quad (4.72)$$

A continuación, trataremos de generalizar este razonamiento. Consideremos la superficie de un determinado medio conductor, tal y como se muestra en la siguiente figura.

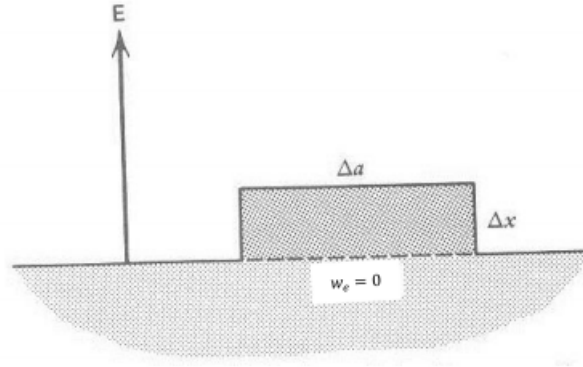


Figura 4.4: Superficie de un material conductor, donde se está considerando un desplazamiento virtual debido a fuerzas electrostáticas en una parte de la misma.

La densidad de energía electrostática, w_e , viene dada por la ecuación 4.22. En temas anteriores hemos demostrado que el campo eléctrico en el interior de los conductores en equilibrio electrostático es nulo, así que la densidad de energía electrostática en su interior será nula también. De esta manera, al considerar el desplazamiento virtual de la figura 4.4, la variación de energía electrostática será.

$$\Delta W_e = -w_e \Delta a \Delta x \quad (4.73)$$

Sin más que despejar

$$-\frac{W_e}{\Delta x} = w_e \Delta a \quad (4.74)$$

Al estar en un caso donde $Q = cte$, el primer término se corresponde con la fuerza electrostática, según la ecuación 4.56

$$F_e = \Delta w_e \Delta a \quad (4.75)$$

Y recuperamos de nuevo la expresión de la presión electrostática.

$$f_e = \frac{F_e}{\Delta a} = w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (4.76)$$

Ahora podemos emplear la ecuación 3.6 para expresar la presión electrostática en función de la densidad superficial de carga.

$$f_e = \frac{1}{2} \frac{\rho_s^2}{\epsilon_0} \quad (4.77)$$

Que en forma vectorial es

$$\vec{f}_e = \frac{1}{2} \frac{\rho_s^2}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (4.78)$$

Recordemos que esta es una fuerza por unidad de superficie, por lo que si queremos obtener la fuerza total sobre un conductor, tendremos que integrarla sobre toda la superficie S del mismo

$$\vec{F}_e = \int_S f_e d\vec{s} = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_S \rho_s^2 d\vec{s} \quad (4.79)$$

4.5.1. Ejemplo: Esfera cortada por un plano

Consideremos una esfera conductora homogénea de radio R en la que existe una carga Q (estamos suponiendo equilibrio electrostático, por lo que dicha carga estará situada en la superficie). Como la esfera es homogénea, la carga también se distribuirá de esa manera, por lo que la densidad superficial de carga será.

$$\rho_s = \frac{Q}{4\pi R^2} = cte \quad (4.80)$$

Calculemos la fuerza total sobre esta esfera usando la presión electrostática.

$$\vec{F}_e = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_S \rho_s^2 d\vec{s} = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \int_S d\vec{s} \quad (4.81)$$

Ahora, en coordenadas esféricas, $d\vec{s} = R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \hat{r}$. Sustituyendo en la expresión anterior

$$\vec{F}_e = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = 0 \quad (4.82)$$

Que es el único resultado lógico, y no tiene demasiado interés, pero sirve de práctica para lo que haremos a continuación, además de convencernos de que la teoría es correcta.

Consideremos ahora que a nuestra esfera le hemos realizado un corte, separándola en dos mitades no necesariamente iguales, tal y como se indica en la figura.

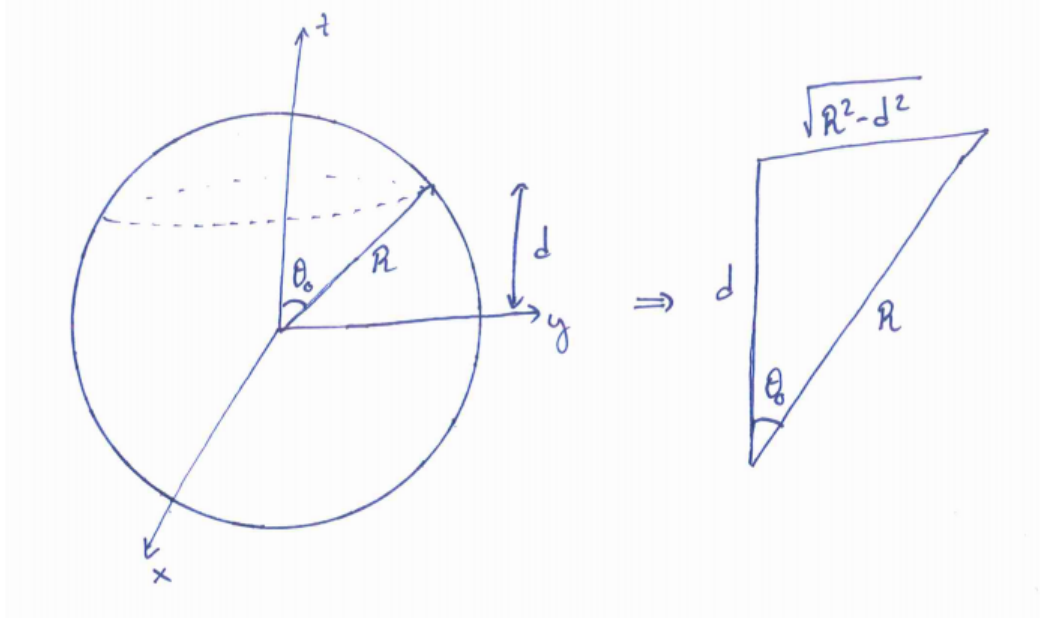


Figura 4.5: Esfera conductora homogéneamente cargada cortada por un plano a una cierta altura d .

Ahora las dos partes en las que se ha dividido la esfera actúan como cuerpos independientes. Busquemos pues la fuerza electrostática que actúa sobre la mitad superior.

$$\vec{F}_e = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_S \rho_s^2 d\vec{s} \quad (4.83)$$

La distribución superficial de carga será la misma que antes, por lo que.

$$\vec{F}_e = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \int_S d\vec{s} \quad (4.84)$$

E introduciendo el correspondiente elemento diferencial de superficie

$$\vec{F}_e = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_0} \sin(\theta) \hat{r} d\theta \quad (4.85)$$

Y expandiendo \hat{r} tenemos que.

$$\vec{F}_e = \frac{R^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_0} \sin \theta (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) d\theta \quad (4.86)$$

Es sencillo ver que las componentes x e y de la fuerza se anulan, por lo que nos queda

$$\vec{F}_e = \frac{\pi}{\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 R^2 \hat{z} \int_0^{\theta_0} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\pi R^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \sin^2 \theta_0 \hat{z} \quad (4.87)$$

Eliminando el paréntesis

$$\vec{F}_e = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2} \sin^2 \theta_0 \hat{z} \quad (4.88)$$

Si ahora nos fijamos en el triángulo de la figura, es inmediato deducir que

$$\sin \theta_0 = \frac{\sqrt{R^2 - d^2}}{R} \quad (4.89)$$

Y por lo tanto, la fuerza sobre el fragmento superior será

$$\vec{F}_e = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^4} (R^2 - d^2) \hat{z} \quad (4.90)$$

4.6. Autoenergía electrostática

Vamos a empezar esta sección calculando la energía electrostática de configuración de una esfera homogénea de radio a cargada con una carga Q , con una densidad volumétrica de carga $\rho_v = cte$. Para ello, construiremos la esfera por capas. Pensemos entonces en una fase intermedia, en la que la esfera tiene un radio r , y calculemos el trabajo necesario para traer la carga suficiente para formar otra capa desde el infinito hasta la superficie de la esfera.

En primer lugar, interesa el campo electrostático generado por la esfera de radio r . Para ello, consideremos una superficie esférica S de radio $R \geq r$ concéntrica a nuestra esfera. Por simetría, el campo eléctrico generado por la esfera será de la forma $\vec{E} = E(R) \hat{r}$, por lo que su flujo, Φ a través de S será

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{r} = 4\pi R^2 E(R) \quad (4.91)$$

Por otro lado, la carga encerrada en el interior de S será

$$Q_{enc} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v \quad (4.92)$$

Y por lo tanto, según la ley de Gauss

$$\vec{E}(R) = \frac{r^3 \rho_v}{3R^2 \epsilon_0} \hat{r} \quad (4.93)$$

Ahora, la cantidad de carga necesaria para crear una nueva capa será igual a la densidad volumétrica de carga multiplicada por el "volumen" de esa capa

$$dq = 4\pi \rho_v dr \quad (4.94)$$

El trabajo infinitesimal para traer esta cantidad de carga desde el infinito hasta la superficie esférica será

$$dW = \Delta V dq \quad (4.95)$$

Donde ΔV viene dado por

$$\Delta V = V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty E dR = \int_r^\infty \frac{r^3 \rho_v}{3R^2 \epsilon_0} dR = \frac{\rho_v r^2}{3\epsilon_0} \quad (4.96)$$

Y por lo tanto, la cantidad de trabajo necesaria para crear una nueva capa (en función del radio de la esfera) será

$$dW(r) = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_v^2 r^4}{\epsilon_0} dr \quad (4.97)$$

Y para hallar la energía electrostática de configuración de nuestra esfera de radio a , no hay más que integrar esta expresión entre todos los radios intermedios durante la construcción de la esfera

$$W = \int_0^a dW = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_v^2}{\epsilon_0} \int_0^a r^4 dr = \frac{4\pi}{15} \frac{a^5 \rho_v^2}{\epsilon_0} \quad (4.98)$$

Ahora bien. Si Q es la carga total de la esfera, podemos escribir la densidad volumétrica como

$$\rho_v = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad (4.99)$$

Y por lo tanto la energía será

$$W = \frac{4\pi}{15} \frac{a^5}{\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \right)^2 \quad (4.100)$$

Que, simplificando, se puede expresar como

$$W = \frac{3Q^2}{20\pi a\epsilon_0} \quad (4.101)$$

Ahora que ya tenemos este resultado, pensemos por un momento en el electrón. Aunque hasta ahora los hemos considerado como puntos sin volumen, esto claramente no refleja la realidad clásica. Si nos acercamos a escalas atómicas, no sería descabellado pensar en el electrón como en una esfera muy pequeña, con un radio que tiende a cero. De esta manera, sería posible aplicar la ecuación 4.101 para calcular la energía de configuración de un electrón, a la que nos referiremos como autoenergía electrostática. Sin embargo, al hacer esto nos encontramos con que

$$W_{auto} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{3e_-^2}{20\pi a\epsilon_0} = \frac{3e_-^2}{20\pi\epsilon_0} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} = \infty \quad (4.102)$$

Hemos llegado a algo aparentemente absurdo, ya que lo que cabría esperar sería una energía nula (ya que si en el vacío existe tan solo una carga puntual la energía necesaria para llevarla desde el infinito hasta su posición actual es nula, porque esto equivale a no moverla). Esta contradicción se debe a que el cálculo que hemos utilizado está fundamentalmente equivocado. Al realizarlo, hemos asumido que vamos formando la esfera a partir de cantidades pequeñas de carga, pero en el caso del electrón, esto no es posible, ya que el propio electrón es la unidad fundamental de carga, por lo que es imposible formarlo a partir de cargas más pequeñas. Hemos llegado pues a una de las limitaciones de la teoría electrostática, y es que no nos permite describir adecuadamente a las unidades fundamentales de carga.

Capítulo 5

Métodos especiales en electrostática.

En temas anteriores, hemos deducido a partir del teorema de Helmholtz la expresión que nos permite calcular el potencial escalar eléctrico generado por un conjunto de cargas puntuales o por una distribución continua de carga. Sin embargo, hay ocasiones en las que estas expresiones no nos resultan demasiado útiles, bien porque no conocemos la función de distribución de la carga en todo el espacio o bien porque las integrales resultantes son excesivamente complejas. En estos casos, utilizaremos otro método, basado en resultados que ya hemos deducido antes: la resolución de las ecuaciones de Laplace y Poisson.

5.1. Unicidad de solución de la ecuación de Laplace

Recordemos la expresión de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5.1)$$

Esta es la forma homogénea de la ecuación de Poisson, y es aplicable a regiones del espacio que no contienen carga en su interior. En esta sección demostraremos que si hemos obtenido una solución a esta ecuación que satisfaga unas ciertas condiciones de contorno, entonces dicha solución es única.

Supongamos de momento que contamos con dos soluciones para la ecuación de Laplace en una determinada región, y con unas determinadas condiciones de contorno, a las que nos referiremos como $\phi_1(\vec{r})$ y $\phi_2(\vec{r})$. Ahora, construimos la siguiente función.

$$\phi \equiv \phi_1 - \phi_2 \quad (5.2)$$

Veamos lo que ocurre si aplicamos el operador laplaciano a esta función

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_2 \quad (5.3)$$

Pero como tanto ϕ_1 como ϕ_2 son soluciones de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0 + 0 = 0 \quad (5.4)$$

Y por lo tanto ϕ es también una solución a la ecuación de Laplace. En cuanto a las condiciones de contorno que verifica ϕ , tenemos que, sobre la frontera

$$\phi_1|_{\text{frontera}} = \phi_2|_{\text{frontera}} \quad (5.5)$$

Y por lo tanto

$$\phi_3|_{\text{frontera}} = 0 \quad (5.6)$$

Ahora, utilizando la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \cdot (u\vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla u + u \nabla \cdot \vec{A} \quad (5.7)$$

Obtenemos que

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla^2 \phi \quad (5.8)$$

Y recordando que ϕ verifica la ecuación de Laplace

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = (\nabla \phi)^2 \quad (5.9)$$

Ahora, podemos integrar ambos miembros en el volumen τ ocupado por la región donde estamos resolviendo la ecuación, y aplicar el teorema de la divergencia

$$\int_{\tau} (\nabla \phi)^2 dv = \int_{\tau} \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dv = \oint_S \phi \nabla \phi ds \quad (5.10)$$

Y como sabemos que en la superficie S (la frontera), $\phi = 0$

$$\int_{\tau} (\nabla \phi)^2 dv = 0 \quad (5.11)$$

Esto solo se verifica si el integrando es cero en todos los puntos del volumen

$$(\nabla \phi)^2 = 0 \quad (5.12)$$

Si ahora expandimos este integrando, llegamos a que es igual a una suma de cuadrados

$$(\nabla \phi)^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 = 0 \quad (5.13)$$

Esto solo se verifica si todos los sumandos son nulos, lo que nos lleva a

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (5.14)$$

Y por lo tanto

$$\phi = cte \quad (5.15)$$

No obstante, como sabemos que en la frontera, $\phi = 0$, sabemos que $\phi = 0$ en todo el volumen τ . Si ahora volvemos a la definición de esta función

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 = 0 \implies \phi_1 = \phi_2 \quad (5.16)$$

Llegamos entonces a que las dos posibles soluciones son en realidad la misma, por lo que hemos demostrado que bajo unas determinadas condiciones de contorno, la solución a la ecuación de Laplace es única.

5.2. Unicidad de solución de la ecuación de Poisson

Ahora probaremos que, al igual que la ecuación de Laplace, la solución a la ecuación de Poisson es única una vez se fijan las condiciones de contorno. Para ello, consideremos un volumen τ limitado por una superficie S. Dentro de este volumen pueden existir tanto regiones conductoras como regiones dieléctricas en las que exista carga (recordemos que el vacío es un caso particular de un dieléctrico). Para todas las regiones dieléctricas en las que exista carga, libre o ligada, necesitaremos especificar la densidad de carga $\rho_v(\vec{r})$, y en las regiones conductoras necesitaremos especificar la carga total de ese conductor o bien el potencial de

esa región (recordando que los conductores son volúmenes equipotenciales). Si ahora especificamos el valor del potencial en la superficie S, la solución a la ecuación de Poisson será única.

Para demostrarlo, procederemos de manera similar a como hicimos con la ecuación de Laplace. Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos soluciones a la ecuación de Poisson que verifican las condiciones de frontera. A partir de estas dos soluciones podemos construir una nueva función.

$$\phi_3 \equiv \phi_1 - \phi_2 \quad (5.17)$$

Podemos definir también el siguiente campo vectorial

$$\vec{E}_3 = -\nabla\phi_3 \quad (5.18)$$

Veamos lo que le ocurre a ϕ_3 en las distintas regiones del volumen τ . En primer lugar, en las regiones de este volumen en las que no exista carga (lo cual incluye el interior de los conductores), tanto ϕ_1 como ϕ_2 verificarán la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\phi_1 = \nabla^2\phi_2 = 0 \quad (5.19)$$

Y por lo tanto

$$\nabla^2\phi_3 = 0 \quad (5.20)$$

Por otro lado, en las regiones dieléctricas donde hemos especificado la densidad de carga, ϕ_1 y ϕ_2 cumplirán la misma ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi_1 = \nabla^2\phi_2 = -\frac{\rho_v(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (5.21)$$

Y de esta manera, en estas regiones

$$\nabla^2\phi_3 = 0 \quad (5.22)$$

En la superficie frontera S, donde como ϕ_1 y ϕ_2 cumplen las mismas condiciones de contorno

$$\phi_3 = \phi_1|_{frontera} - \phi_2|_{frontera} = 0 \quad (5.23)$$

Y lo mismo ocurre en aquellas superficies conductoras donde esté especificado el potencial.

$$\phi_3|_{sup.conductora} = \phi_1|_{sup.conductora} - \phi_2|_{sup.conductora} = 0 \quad (5.24)$$

Sin embargo, como hemos dicho antes, podemos tener superficies conductoras donde el potencial no esté fijado, pero en las que conocemos la carga total Q. En principio no podemos asegurar que ϕ_3 se anule en estas regiones, tan solo que ha de ser constante. Para discutir estas regiones, consideremos las siguientes integrales.

$$I_0 = \oint_S \phi_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{s} \quad (5.25)$$

$$I_i = \oint_{S_i} \phi_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{s} \quad (5.26)$$

Donde las S_i son superficies cerradas infinitamente cerca de las superficies de las regiones conductoras, de tal manera que el campo eléctrico será normal a la superficie en todo punto, y el potencial será constante en estas superficies, e igual al potencial del conductor. La integral I_0 se anula en todo momento, ya que sabemos que $\phi_3|_{frontera} = 0$, y por el mismo motivo, I_i se anula en las S_i en torno a los conductores con el potencial fijo. Para los conductores con carga fija, utilizando la ley de Gauss

$$I_i = \phi_3 \oint_{S_i} \vec{E}_3 \cdot d\vec{s} = \phi_3 \left[\oint_{S_i} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} - \oint_{S_i} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} \right] = \phi_3 \left[\frac{Q}{\epsilon_0} - \frac{Q}{\epsilon_0} \right] = 0 \quad (5.27)$$

Donde $\vec{E}_i = -\nabla\phi_i$. Hemos llegado entonces que en todas las superficies conductoras y en la frontera S , las integrales I_0 e I_i se anulan. Ahora podemos pensar en el volumen limitado exteriormente por S e interiormente por las S_i , al que nos referiremos como $\tilde{\tau}$

$$\tilde{\tau} \equiv \tau - \sum_i \tau_i \quad (5.28)$$

Donde los τ_i son los volúmenes ocupados por las regiones conductoras. Ahora, según el teorema de la divergencia, para un campo vectorial cualquiera, \vec{C} , tendremos que

$$\int_{\tilde{\tau}} (\nabla \cdot \vec{C}) dv = \oint_S \vec{C} \cdot d\vec{s} - \sum_i \oint_{S_i} \vec{C} \cdot d\vec{s} \quad (5.29)$$

Donde el signo menos está para corregir el hecho de que en las integrales sobre las S_i , el vector $d\vec{s}$ está definido hacia el interior de $\tilde{\tau}$, en lugar de hacia el exterior. Ahora, haciendo que $\vec{C} = \phi_3 \vec{E}_3$, tenemos que

$$\int_{\tilde{\tau}} (\nabla \cdot \phi_3 \vec{E}_3) dv = \oint_S \phi_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{s} - \sum_i \oint_{S_i} \phi_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{s} = I_0 - \sum_i I_i = 0 \quad (5.30)$$

Si ahora expandimos la divergencia

$$\nabla \cdot (\phi_3 \vec{E}_3) = \nabla\phi_3 \cdot \vec{E}_3 + \phi_3 \nabla \cdot \vec{E}_3 = \nabla\phi_3 \cdot \vec{E}_3 - \phi_3 \nabla^2\phi_3 \quad (5.31)$$

Ahora, recordemos que en el interior de $\tilde{\tau}$ solo existen regiones dieléctricas o regiones sin carga, donde ya hemos demostrado que ϕ_3 verifica la ecuación de Laplace. Por lo tanto

$$\nabla \cdot (\phi_3 \vec{E}_3) = \nabla\phi_3 \cdot \vec{E}_3 = -E_3^2 \quad (5.32)$$

Juntándolo todo, llegamos a la siguiente igualdad

$$\int_{\tilde{\tau}} E_3^2 dv = 0 \quad (5.33)$$

Como el integrando es positivo y la integral nula, el integrando ha de ser nulo en todo el volumen $\tilde{\tau}$

$$E_3^2 = 0 \implies E_3 = 0 \implies \phi_3 = cte \quad (5.34)$$

Y por lo tanto, $\phi_3 = cte$ en todo $\tilde{\tau}$, y como en la superficie S $\phi_3 = 0$, entonces $\phi_3 = 0$ en $\tilde{\tau}$. Además, como los conductores (que son las únicas regiones de τ que no están en $\tilde{\tau}$) son volúmenes equipotenciales, ϕ_3 valdrá en ellos lo mismo que en las S_i , que por estar en $\tilde{\tau}$ están a $\phi_3 = 0$, y por lo tanto, en el interior de los conductores ϕ_3 será nulo también. Por lo tanto, hemos demostrado que para todo punto en el interior de τ

$$\phi_3 = \phi_1 - \phi_2 = 0 \quad (5.35)$$

Y por lo tanto ambas soluciones, ϕ_1 y ϕ_2 , son idénticas en todo punto, y ya hemos demostrado que bajo estas condiciones, la solución a la ecuación de Poisson es única.

5.3. Método de las imágenes

En este apartado, aprovecharemos los dos teoremas de unicidad que acabamos de demostrar para simplificar en gran medida varios problemas electrostáticos. La idea de este método es sustituir distribuciones de carga complicadas que estén fuera de la región donde queremos calcular el campo por cargas puntuales, de manera que se satisfagan las condiciones de contorno y que el potencial resultante verifique la ecuación de Laplace (o de Poisson).

De esta manera, como la solución es única, dará igual que lleguemos a ella a través de cargas que en realidad no existen.

La idea es que, dado un conjunto de cargas puntuales y varias distribuciones complejas de carga, así como unas determinadas condiciones de contorno, seamos capaces de llegar a una solución de la forma

$$\phi = \sum_{\text{Reales}} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R} + \sum_{\text{Ficticias}} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (5.36)$$

Tal que ϕ satisfaga las condiciones de contorno y verifique la ecuación que le corresponda (Laplace o Poisson). A continuación resolveremos dos ejemplos clásicos utilizando este método.

5.3.1. Ejemplo 1: Carga puntual enfrentada a un plano conductor

Vamos a considerar una carga q situada sobre un plano conductor infinito conectado a tierra a una distancia d del mismo, tal y como se muestra en la figura. Estamos interesados en calcular el potencial en la región sobre el plano, donde se encuentra nuestra carga puntual.

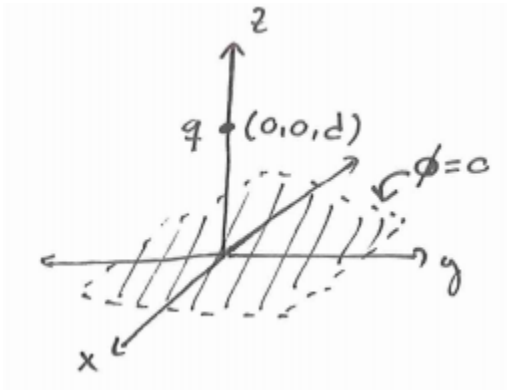


Figura 5.1: Situación real. Buscamos el potencial $\phi(x, y, z)$ para $z > 0$

Matemáticamente, buscamos una solución a la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon_0} \quad \text{Donde } \vec{r}_0 = (0, 0, d) \quad (5.37)$$

Con las siguientes condiciones de contorno

$$\phi(x, y, 0) = 0 \quad (5.38)$$

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = 0 \quad (5.39)$$

Olvidémonos por un momento del plano conductor, y consideremos la siguiente situación

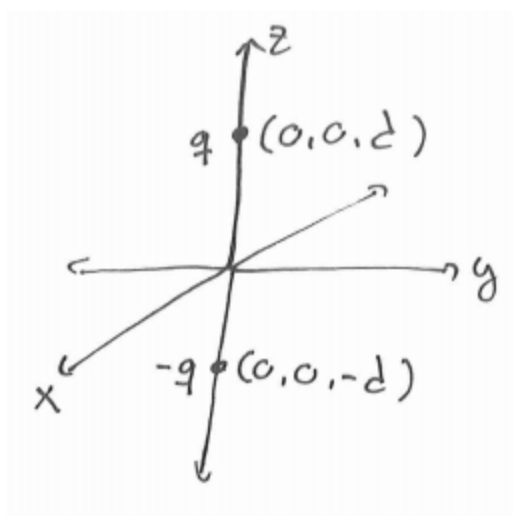


Figura 5.2: Situación ficticia en la que hemos introducido una carga imagen

El potencial generado por esta distribución de cargas puntuales vendrá dado por

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right) \quad (5.40)$$

Es sencillo comprobar que este potencial verifica las condiciones de contorno de nuestro problema inicial. Ver que cumple la ecuación de Poisson en esa región no es tan trivial, ya que aplicando el operador laplaciano a este potencial obtenemos que $\nabla^2\phi = 0$. Sin embargo, estamos cometiendo el error de no tener en cuenta el punto $(0, 0, d)$, y es posible demostrar que en ese punto se verifica la ecuación de Poisson tal y como hicimos en temas anteriores al introducir la función delta de Dirac.

En resumen, hemos encontrado una solución para la ecuación de Poisson en un determinado volumen que cumple unas determinadas condiciones de contorno. Según el teorema de unicidad de solución para la ecuación de Poisson, esta solución será única, por lo que podemos decir que, para $z > 0$, el potencial será

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right) \quad (5.41)$$

Por supuesto, esta ecuación no describe adecuadamente el potencial en la región con $z < 0$, pero como no es nuestra zona de interés, no tiene mayor relevancia. A la carga ficticia $-q$ se la conoce como la imagen electrostática de la carga q .

Por supuesto, ahora que conocemos el potencial escalar, es sencillo calcular el campo eléctrico sin más que utilizar que $\vec{E} = -\nabla\phi$. También es posible calcular la carga total inducida sobre el plano (que resulta ser $-q$), así como la densidad superficial de carga en dicho plano¹.

5.3.2. Ejemplo 2: Carga puntual enfrentada a una esfera conductora

Ahora resolveremos el caso de una carga puntual enfrentada a una esfera conductora conectada a tierra, como se muestra en la siguiente figura.

¹Ver [1], sección 3.2.2

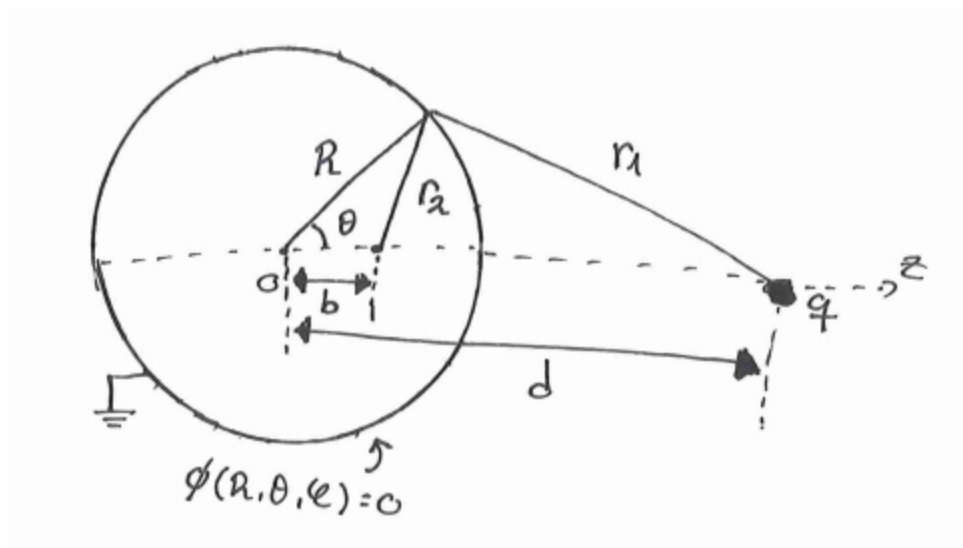


Figura 5.3: Situación real. Buscamos el potencial $\phi(r, \theta, \varphi)$ para $r > R$

Matemáticamente, para obtener el potencial fuera de la esfera conductora tendremos que resolver la siguiente ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon_0} \quad \text{Donde } \vec{r}_0 = (0, 0, d) \quad (5.42)$$

Las condiciones de contorno que tenemos que imponer son

$$\phi(R, \theta, \varphi) = 0 \quad (5.43)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (5.44)$$

Ahora vamos a olvidarnos de la esfera conductora y considerar la siguiente configuración de cargas puntuales.

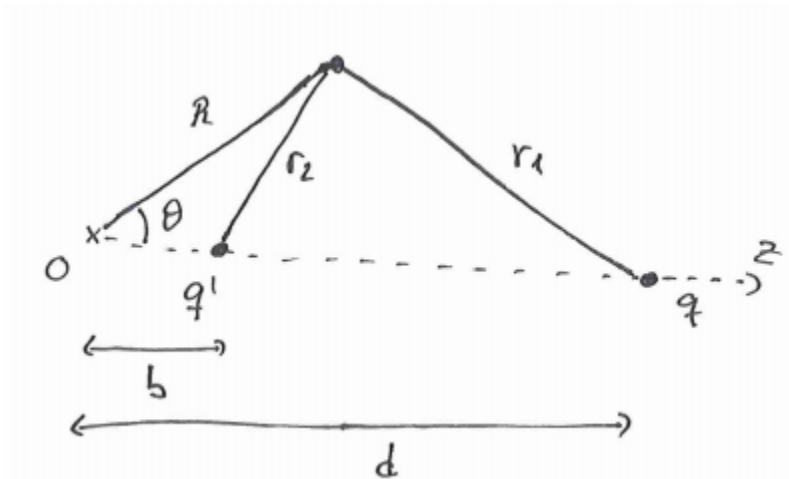


Figura 5.4: Situación ficticia en la que hemos introducido la carga imagen q'

Donde b y q' toman los siguientes valores

$$b = \frac{R^2}{d} \quad (5.45)$$

$$q' = -q \frac{R}{d} \quad (5.46)$$

Ahora podemos calcular el potencial escalar generado por esta distribución de carga, que será

$$\phi(r_1, r_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{r_2 d} \right) \quad (5.47)$$

Que en función del ángulo θ se puede escribir como

$$\phi(r, \theta, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} - \frac{R}{d \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} - \frac{2rR^2}{d} \cos \theta}} \right) \quad (5.48)$$

Se puede comprobar que esta función satisface la ecuación de Poisson en la región con $r > R$ y que verifica las condiciones de contorno. Así pues, el teorema de unicidad de solución para la ecuación de Poisson nos garantiza que esta no solo es la solución correcta, sino que es la única solución.

Al igual que en el caso del plano, a la carga q' se la conoce como imagen electrostática de la carga q .

5.4. Solución de la ecuación de Laplace

A las funciones que cumplen la ecuación de Laplace se las conoce como funciones armónicas, y son de gran utilidad para resolver problemas en electrostática, ya que se conoce su forma general. Existen distintos tipos de funciones armónicas, dependiendo del sistema de coordenadas en el que estemos trabajando.

<p>Armónicos rectangulares</p> $\phi = C_1xyz + C_2xy + C_3yz + C_4zx + C_5x + C_6y + C_7z + C_0$ $\phi = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \alpha_n x + B_n \sin \alpha_n x) (C_n e^{\alpha_n y} + D_n e^{-\alpha_n y})$ <p>Armónicos cilíndricos</p> $\phi = (F \ln(r) + F) (H\theta + C_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta)$ <p>Armónicos esféricos</p> $\phi = C_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) (C_n P_n(\cos \theta) + D_n Q_n(\cos \theta))$
--

Cuadro 5.1: Soluciones generales a la ecuación de Laplace en distintos sistemas de coordenadas. Las funciones P_n y Q_n son los polinomios de Legendre de primera y segunda clase, respectivamente.

En estos apuntes no discutiremos como se llega a estas soluciones, ya que no es el objetivo de esta asignatura². En cuanto a los polinomios de Legendre que aparecen en estas soluciones, su forma se muestra en la siguiente tabla.

²Estas soluciones se justifican detalladamente en Métodos Matemáticos V

n	$P_n(\mu)$	$Q_n(\mu)$
0	1	$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right)$
1	μ	$\frac{1}{2} \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) - 1$
2	$\frac{1}{2} (3\mu^2 - 1)$	$\frac{1}{4} (3\mu^2 - 1) \ln \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) - \frac{3}{2} \mu$
3	$\frac{1}{2} (5\mu^3 - 3\mu)$	$\frac{1}{2} P_3(\mu) \ln \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) - \frac{5}{3} P_2(\mu) - \frac{1}{6}$

Cuadro 5.2: Polinomios de Legendre de primera y segunda clase

5.4.1. Ejemplo: Potencial generado por una corteza esférica.

Consideremos el caso de una esfera (no conductora) en cuya superficie existe una distribución superficial de carga ρ_s con la siguiente forma

$$\rho_s = \rho_0 \cos \theta \quad (5.49)$$

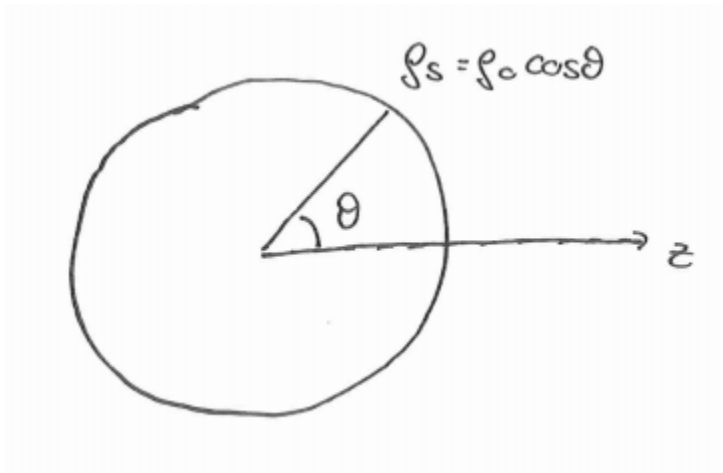


Figura 5.5: Esfera no conductora con una densidad superficial de carga que depende del ángulo acimutal, θ

En primer lugar, nuestro problema tiene claramente una simetría esférica, y además cuenta con dos regiones bien diferenciadas. La región interior ($r < R$) y la exterior ($r > R$). Planteamos entonces la solución general de la ecuación de Laplace en función de los armónicos esféricos.

$$\phi_{int} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (5.50)$$

$$\phi_{ext} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (5.51)$$

En nuestra propuesta de solución no aparecen los polinomios de Legendre de segunda clase, ya que nada en la simetría de este problema nos sugiere dependencias de tipo logarítmico³. Ahora debemos considerar diversas condiciones de contorno que nos determinarán las diversas constantes que aparecen en la solución general.

Fijémonos primero en la solución para $r < R$. La región en la que existe esta solución

³Es posible llegar a la solución general considerando estas funciones desde el principio, es solo más tedioso.

incluye el origen, y la solución que buscamos ha de ser finita en ese punto. De esta manera, podemos afirmar que

$$B_n = 0 \quad \forall n \quad (5.52)$$

De forma similar, nos gustaría que el potencial tendiese a cero lo suficientemente lejos de la distribución de carga (cuando $r \rightarrow \infty$). Para ello, tendremos que asegurarnos de que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_{ext} = 0 \quad (5.53)$$

Es sencillo deducir que la condición necesaria y suficiente para garantizar esto es

$$C_n = 0 \quad \forall n \quad (5.54)$$

Además, es evidente que las dos soluciones han de ser idénticas cuando $r = R$, es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (5.55)$$

Ahora utilizaremos un hecho que no vamos a demostrar, y es que los polinomios de Legendre son ortogonales entre si. En la asignatura de Métodos Matemáticos V se hace un mayor inciso en lo que significa este concepto, pero para lo que nos interesa ahora es suficiente la idea de que es imposible construir un polinomio de Legendre a partir de una combinación lineal del resto de ellos, es decir

$$P_k(\mu) \neq \sum_{n=0}^{k-1} A_n P_n(\mu) + \sum_{n=k+1}^{\infty} B_n P_n(\mu) \quad (5.56)$$

Esto nos permite afirmar, a partir de la ecuación 5.55

$$A_n R^n = \frac{D_n}{R^{n+1}} \quad (5.57)$$

Reorganizando términos e introduciéndolos en las soluciones, reducimos el problema a hallar una última constante.

$$\phi_{int} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (5.58)$$

$$\phi_{ext} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n R^{2n+1}}{r^{r+1}} P_n(\cos \theta) \quad (5.59)$$

Ahora vamos a calcular las A_n . Para ello, utilizaremos un resultado de temas anteriores, el comportamiento de las componentes normales de \vec{D} (ecuación 3.46), que nos garantiza que, cuando $r = R$

$$\left(\vec{D}_{ext} - \vec{D}_{int} \right) \cdot \hat{r} = \rho_s \quad (5.60)$$

Estamos en el vacío, que es un medio lineal, homogéneo e isotrópico, por lo que podemos expresar esta relación en función del campo eléctrico

$$\left(\vec{E}_{ext} - \vec{E}_{int} \right) \cdot \hat{r} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (5.61)$$

Y en función de nuestras soluciones a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial \phi_{int}}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0 \cos \theta}{\epsilon_0} \quad (5.62)$$

Realizando estas derivadas

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n R^{n-1} + (n+1) \frac{R^{2n+1}}{R^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cos \theta \quad (5.63)$$

Dado que $\cos \theta$ es uno de los polinomios de Legendre, sabemos que es imposible construirlo sumando polinomios de Legendre que no sean el propio coseno. De esta manera, podemos decir que

$$A_n = 0 \quad \forall n \neq 1 \quad (5.64)$$

Y para $n = 1$, tenemos que

$$3A_1 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \implies A_1 = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \implies D_1 = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \quad (5.65)$$

Y ya hemos llegado a la expresión del potencial escalar en todo punto

$$\phi_{int} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \cos \theta \quad (5.66)$$

$$\phi_{ext} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \cos \theta \quad (5.67)$$

Y por supuesto, a partir de estos potenciales es sencillo calcular el campo eléctrico usando que $\vec{E} = -\nabla\phi$.

$$\vec{E}_{int} = \frac{\rho_0 \cos \theta}{3\epsilon_0} \hat{r} - \frac{\rho_0 \sin \theta}{3\epsilon_0} \hat{\theta} \quad (5.68)$$

$$\vec{E}_{ext} = -\frac{2\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^3} \cos \theta \hat{r} - \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^3} \sin \theta \hat{\theta} \quad (5.69)$$

Capítulo 6

Corrientes eléctricas estacionarias.

En este tema dejaremos de considerar distribuciones estáticas de carga, y permitiremos el movimiento de las mismas, dando lugar a las corrientes eléctricas, que serán de gran utilidad cuando hablemos del campo magnético.

6.1. Vector densidad de corriente

Imaginemos una superficie cualquiera en el vacío que está siendo atravesada por un determinado flujo de carga. Si buscamos una manera adecuada de definir esta cantidad, sería razonable empezar con el siguiente ratio

$$J = \frac{\Delta q}{\Delta t \Delta S} = \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad (6.1)$$

Es decir, la cantidad de carga que atraviesa una sección de nuestra superficie por unidad de tiempo, donde el cociente entre la carga y el tiempo se denomina intensidad. Sin embargo, y como ocurría cuando definíamos las distribuciones de carga, esta se trata de una función discreta, y nos gustaría contar con una continua. De este modo, el módulo de lo que será nuestro vector densidad de corriente será

$$|\vec{J}| \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad (6.2)$$

Por supuesto, el módulo de este vector no es suficiente para definirlo, ya que nos falta su dirección y sentido, que son tales que en cada punto, el vector densidad de corriente apunta en la dirección en la que se propaga la carga¹. Si ahora \hat{J} es el vector unitario que apunta en esta dirección, tendremos que

$$\vec{J} = J \hat{J} \quad (6.3)$$

Volviendo al concepto de intensidad, antes dijimos que venía dado por el cociente entre carga y tiempo, pero esto es de nuevo una aproximación (ya que estamos asumiendo que el flujo de carga es perpendicular a nuestra superficie). En función de nuestro vector densidad de corriente, la intensidad que atraviesa una superficie S viene dada por

$$I \equiv \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (6.4)$$

¹Aquí hay que hacer un inciso, y es que hoy en día sabemos que lo que realmente se mueve son las cargas negativas. Sin embargo, antiguamente se pensaba que lo que se desplazaba eran las cargas positivas, y por ese motivo consideraremos siempre los flujos de carga como un transporte de carga positiva.

6.1.1. Relación con los portadores de carga

Imaginemos una región cualquiera del espacio libre donde existe una determinada densidad de corriente \vec{J} , que en principio puede tener cualquier forma. Sin embargo, podemos considerar una zona lo suficientemente pequeña de esta región tal que sea posible construir la situación que vemos en la figura

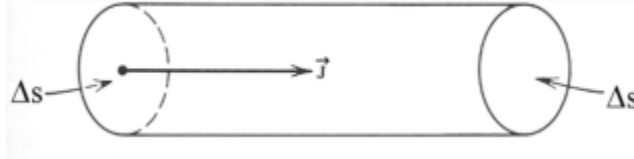


Figura 6.1: Superficie Δs que es atravesada normalmente por el vector densidad de corriente \vec{J} durante un tiempo Δt

La cantidad total de carga que atraviesa esta superficie en un tiempo Δt será

$$\Delta q = J \Delta s \Delta t \quad (6.5)$$

Ahora, a medida que la carga va atravesando la superficie, va formando el cilindro que vemos en la figura, donde se distribuye siguiendo una determinada distribución volumétrica de carga ρ_v , de modo que si Δv es el volumen del cilindro

$$\Delta q = \rho_v \Delta v \quad (6.6)$$

Ahora, igualando ambas expresiones para Δq , tenemos que

$$J \Delta s \Delta t = \rho_v \Delta v \implies J = \rho_v \frac{\Delta v}{\Delta s \Delta t} \quad (6.7)$$

Y si ahora Δl es la longitud de este cilindro

$$J = \rho_v \frac{\Delta l}{\Delta t} \quad (6.8)$$

Y si ahora hacemos tender el volumen del cilindro a cero (y por lo tanto hacemos tender a cero el tiempo), tendremos que

$$J = \rho_v \frac{dl}{dt} = \rho_v V \quad (6.9)$$

Donde V es la velocidad de los portadores de carga, que como además tiene la misma dirección que \vec{J} , nos permite escribir

$$\vec{J} = \rho_v \vec{V} \quad (6.10)$$

En general, si tenemos N distribuciones de carga diferentes moviéndose con velocidades \vec{V}_i , el vector densidad de corriente vendrá dado por

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N \rho_{vi} \vec{V}_i \quad (6.11)$$

6.1.2. Distribuciones de corriente superficiales y filamentosales

Al igual que con las distribuciones de carga, es razonable imaginarse densidades de corriente bidimensionales (superficiales) y unidimensionales (filamentosales).

En primer lugar, consideremos un movimiento de cargas limitado a una determinada superficie S , para el cual nos gustaría definir un vector densidad de corriente superficial al que llamaremos \vec{k} . Al igual que con las corrientes volúmicas, su sentido será el del desplazamiento de las cargas positivas. En cuanto a su magnitud, pensemos en la siguiente figura.

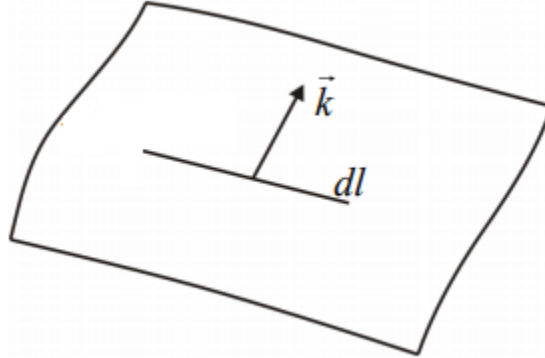


Figura 6.2: Superficie arbitraria donde existe una densidad superficial de corriente \vec{k} , y donde se ha indicado un elemento de línea dl perpendicular a la corriente.

El módulo de \vec{k} se define como la cantidad de carga que fluye por unidad de tiempo y de longitud a través de una línea imaginaria perpendicular a \vec{k} (que en la figura es el elemento de línea dl), o lo que es lo mismo, la cantidad de corriente por unidad de longitud que atraviesa dicha línea imaginaria, es decir

$$\frac{dq}{dt} = dI = k dl \quad (6.12)$$

Es posible demostrar, siguiendo un argumento parecido al del apartado anterior, que la densidad superficial de corriente se relaciona de la siguiente manera con la velocidad de los portadores de carga

$$\vec{k} = \rho_s \vec{V} \quad (6.13)$$

Finalmente, una corriente filamental es tan solo una intensidad (cociente entre carga y tiempo) con una dirección asociada, que al igual que antes es la del movimiento de las cargas positivas. Además, igual que con las otras corrientes, dada una distribución lineal de carga, y una determinada velocidad de los portadores de carga, tenemos que

$$I = \rho_l |\vec{V}| \quad (6.14)$$

6.2. El principio de conservación de la carga. Ecuación de continuidad

Experimentalmente se ha comprobado que la carga nunca se crea o se destruye. Dado un sistema aislado, la carga total del mismo permanece siempre constante, por mucho que se pueda reagrupar. Esta ley experimental, que no se puede demostrar, se conoce como el principio de conservación de la carga.

Veamos a lo que nos lleva este principio, considerando una superficie cerrada S que encierra un volumen τ , ambas situadas en presencia de una densidad de carga $\rho_v(\vec{r})$ y una densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r})$. Bajo estas condiciones, la variación de la carga encerrada en la

superficie S vendrá dada por

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho_v(\vec{r}') dv' \quad (6.15)$$

Por otro lado, el flujo de carga a través de la superficie S será

$$\oint_S \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}' \quad (6.16)$$

Ahora pensemos en lo que nos dice el principio de conservación de la carga. Si la carga no puede crearse ni destruirse, toda la carga que abandona la superficie S por medio del flujo a través de la superficie ha tenido que venir del interior de la propia superficie (el volumen τ), lo que quiere decir que el flujo y la variación de carga en el interior han de compensarse

$$\oint_S \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}' + \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho_v(\vec{r}') dv' = 0 \quad (6.17)$$

Como el volumen τ no varía con el tiempo, podemos introducir la derivada en el interior de la integral si la cambiamos por una derivada parcial

$$\oint_S \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}' + \int_{\tau} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv' = 0 \quad (6.18)$$

Y si además utilizamos el teorema de la divergencia en la primera integral

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{J} dv' + \int_{\tau} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv' = \int_{\tau} \left(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \right) dv' = 0 \quad (6.19)$$

Ahora, esta ecuación tiene que ser cierta para cualquier volumen, no solo para τ , ya que elijamos la superficie que elijamos podemos llegar de nuevo a este resultado. De este modo, la única opción posible es que el integrando sea nulo, lo que nos lleva a la siguiente expresión

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \quad (6.20)$$

Que se conoce como ecuación de continuidad, y que al ser una consecuencia directa del principio de conservación de la carga, tiene que cumplirse siempre.

Ahora, tan solo despejando, llegamos la expresión de la divergencia de \vec{J}

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (6.21)$$

Ahora, siguiendo exactamente el mismo razonamiento que cuando tratamos las componentes normales del campo \vec{D} en temas anteriores, podemos llegar a que en la superficie de separación entre dos medios 1 y 2

$$\left(\vec{J}_2 - \vec{J}_1 \right) \cdot \hat{n} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (6.22)$$

Que indica que si de una superficie sale más corriente de la que llega, es decir $\hat{n} \cdot \left(\vec{J}_2 - \vec{J}_1 \right) > 0$, esto significa que la densidad superficial de carga almacenada en esa superficie tiene que disminuir $\left(\frac{\partial \rho_s}{\partial t} < 0 \right)$.

6.2.1. Corrientes estacionarias

Se conoce como corriente estacionaria a aquella que no modifica las densidades de carga

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 \quad (6.23)$$

Y que por supuesto verifican

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (6.24)$$

Podemos pensar en una corriente estacionaria como un flujo de carga constante que no cambia a lo largo del tiempo.

6.2.2. Corrientes de polarización

Como ya discutimos en temas anteriores, cuando a un dieléctrico se le somete a un campo externo, este experimenta un proceso conocido como polarización, en el que las cargas ligadas se pueden reubicar. Esto por supuesto conlleva a un desplazamiento de cargas, y a una densidad de corriente de polarización, \vec{J}_p que tendrá que cumplir la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{J}_p + \frac{\partial \rho_{pv}}{\partial t} = 0 \quad (6.25)$$

Ahora, como sabemos que $\rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P}$, sustituyendo y manipulando la ecuación anterior llegamos a

$$\nabla \cdot \vec{J}_p = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{P}) = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (6.26)$$

Integrando ambos lados de la ecuación en un volumen τ dentro del dieléctrico y reorganizando términos, obtenemos

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \left(\vec{J}_p - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) dv' = 0 \quad (6.27)$$

Ahora, si S es la superficie frontera de τ , podemos utilizar el teorema de la divergencia

$$\oint_S \left(\vec{J}_p - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}' = 0 \quad (6.28)$$

Y como esto es válido para cualquier superficie S, el integrando ha de ser nulo siempre, por lo que llegamos a

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (6.29)$$

6.3. Tensor conductividad eléctrica. La ley de Ohm

Como ya sabemos, el campo eléctrico produce el movimiento de cargas, que nosotros modelamos mediante el vector densidad de corriente, \vec{J} . Esta relación causa-efecto nos dice que tiene que existir algún tipo de conexión entre \vec{E} y \vec{J} . El elemento que los relaciona se denomina tensor conductividad eléctrica, σ . La relación entre los dos vectores en medios lineales es la siguiente

$$J_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{r}) E_j \quad (6.30)$$

O, en forma matricial

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\vec{r}) & \sigma_{12}(\vec{r}) & \sigma_{13}(\vec{r}) \\ \sigma_{21}(\vec{r}) & \sigma_{22}(\vec{r}) & \sigma_{23}(\vec{r}) \\ \sigma_{31}(\vec{r}) & \sigma_{32}(\vec{r}) & \sigma_{33}(\vec{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

Si además el medio es isótropo, tendremos que la conductividad es una función de la posición

$$\vec{J} = \sigma(\vec{r}) \vec{E} \quad (6.32)$$

Y para medios lineales, homogéneos e isótropos, la conductividad es una constante

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (6.33)$$

Ahora veremos como, para medios l.h.i, esta relación es equivalente a la conocida ley de Ohm, $V = IR$. Para ello, consideremos un fragmento de conductor l.h.i como el que se muestra en la figura.

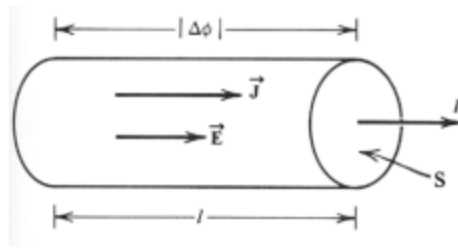


Figura 6.3: Cilindro conductor de longitud l y superficie S sometido a una diferencia de potencial $\Delta\phi$ entre sus extremos, que causa el paso de una intensidad I que consideraremos uniformemente distribuida y perpendicular a la sección del conductor.

En primer lugar, podemos escribir la diferencia de potencial en función del campo eléctrico

$$|\Delta\phi| = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot l \implies |\vec{E}| = \frac{|\Delta\phi|}{l} \quad (6.34)$$

Ahora, recordemos que la intensidad que atraviesa el conductor viene dada por

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = J \cdot S \implies |\vec{J}| = \frac{I}{S} \quad (6.35)$$

Ya que estamos suponiendo que la corriente está uniformemente distribuida. Ahora, usando la relación entre la corriente y el campo eléctrico

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \implies |\vec{J}| = \sigma |\vec{E}| \quad (6.36)$$

Y sustituyendo los valores de los módulos de ambos campos

$$\frac{I}{S} = \frac{|\Delta\phi|}{l} \implies |\Delta\phi| = I \frac{l}{S\sigma} = IR \quad (6.37)$$

Donde a R se la conoce como resistencia del conductor. Es importante darse cuenta de que no es un parámetro característico del mismo, ya que depende de las dimensiones del conductor (a través de las variables l y S). Lo que sí es un parámetro característico es la conductividad σ o su inversa, a la que se la conoce como resistividad y se la denota como ρ

$$\rho \equiv \frac{1}{\sigma} \quad (6.38)$$

6.4. Condiciones de frontera. Refracción del campo eléctrico

Ya hemos deducido la condición de frontera para las componentes normales de \vec{J} en la separación entre dos medios

$$(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \cdot \hat{n} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (6.39)$$

Que, para corrientes estacionarias, se reducen a la conservación de las componentes normales de la densidad de corriente

$$(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \cdot \hat{n} = 0 \quad (6.40)$$

Ahora, si suponemos que estamos ante medios l.h.i, podemos escribir la ecuación anterior como

$$(\sigma_2 \vec{E}_2 - \sigma_1 \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = 0 \quad (6.41)$$

Es decir, las componentes normales del campo eléctrico, en general, no se conservan, sino que son proporcionales

$$E_{n2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} E_{n1} \quad (6.42)$$

Ahora, como $\nabla \times \vec{E} = 0$, las componentes tangenciales del campo eléctrico tienen que conservarse (esto se demostró en temas anteriores).

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (6.43)$$

De esta manera, lo que tenemos es una refracción, como se indica en la siguiente figura

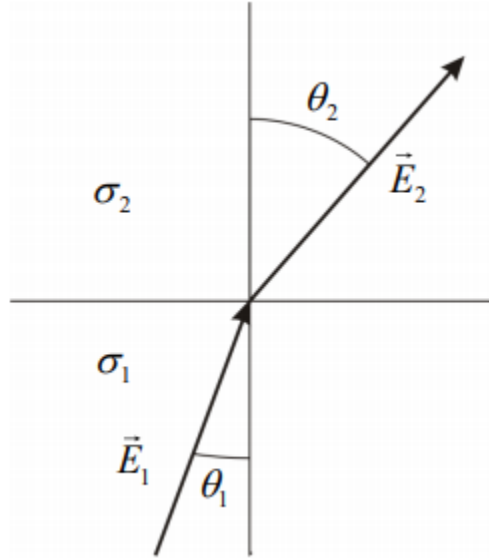


Figura 6.4: Refracción de las líneas de \vec{E} en la separación entre dos medios con distintas conductividades

Los ángulos θ_1 y θ_2 se pueden expresar en función de las componentes normales y tangenciales del campo eléctrico

$$\tan \theta_1 = \frac{E_{t1}}{E_{n1}} \quad (6.44)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{E_{t12}}{E_{n2}} \quad (6.45)$$

Ahora, usando las relaciones entre componentes normales y tangenciales a las que hemos llegado

$$\tan \theta_1 = \frac{E_t}{E_{n1}} \quad (6.46)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{E_t}{E_{n1}} \quad (6.47)$$

Y juntando las dos expresiones, llegamos a la expresión que gobierna la refracción del campo eléctrico

$$\tan \theta_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tan \theta_1 \quad (6.48)$$

6.5. Resistencia y capacidad

En esta sección veremos una manera de relacionar estas dos magnitudes, que ya han aparecido anteriormente. Para ello, consideremos el condensador de la figura

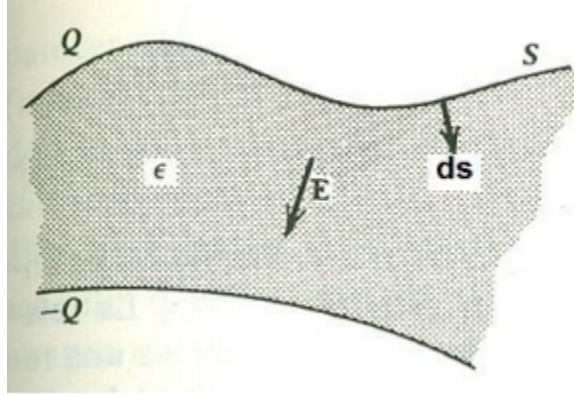


Figura 6.5: Condensador l.h.i de permitividad ϵ y conductividad σ , en el que estamos manteniendo una diferencia de potencial constante entre sus placas

Vamos a calcular varios parámetros de este condensador, y acabaremos llegando a una relación entre su resistencia y su capacidad. Empezaremos calculando la diferencia de potencial entre placas, que viene dado por

$$\Delta\phi = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (6.49)$$

Donde C es un camino cualquiera que va de una placa a la otra. Por otro lado, la carga Q almacenada en cada placa será

$$Q = \oint_S \rho_s ds = \oint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{s} = \epsilon \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (6.50)$$

Donde hemos usado la expresión 3.6 para relacionar la densidad de carga con el campo eléctrico en la superficie de un conductor. Ahora que ya tenemos la carga y la diferencia de potencial, es sencillo calcular la capacidad

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{\epsilon \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r}} \quad (6.51)$$

También podemos calcular la intensidad que circula por el conductor

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \sigma \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (6.52)$$

Y utilizando la ley de Ohm, hallar la resistencia

$$R = \frac{\Delta\phi}{I} = \frac{\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\sigma \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}} \quad (6.53)$$

Ahora, si multiplicamos la resistencia y la capacidad, llegamos a

$$RC = \frac{Q}{I} = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (6.54)$$

6.6. Transición hacia el equilibrio electrostático

Supongamos que tenemos un volumen conductor en el que existe una densidad de carga ρ_v , y que no está en equilibrio electrostático. Evidentemente, el sistema evolucionará hasta alcanzar dicho equilibrio, y su evolución viene dada por la ecuación de continuidad.

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (6.55)$$

Si ahora pensamos en medios l.h.i, podemos escribir esta ecuación como

$$\sigma \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (6.56)$$

O, en función de la densidad de carga

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_v = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (6.57)$$

Es sencillo resolver esta ecuación diferencial y llegar a la dependencia temporal de ρ_v

$$\rho_v(t) = \rho_0 e^{-\tau t} \quad (6.58)$$

Donde

$$\tau \equiv \frac{\epsilon}{\sigma} = RC \quad (6.59)$$

Se llama tiempo de relajación, y es un parámetro característico de cada material.

6.7. Circuitos eléctricos

Para introducir esta sección, volvamos por un momento al caso de la figura 6.5, y preguntémonos lo que pasaría si dejamos que este sistema evolucione. Claramente, al cabo de un cierto tiempo se alcanzará el equilibrio electrostático, ya que al fluir carga de una placa a otra se reduce la diferencia de potencial, y cuando esta llegue a cero, el campo eléctrico desaparecerá en el interior del condensador. Para mantener esa situación sería necesaria una fuente externa de energía que transporte carga de una placa a otra, de modo que en cada una siempre exista una carga total Q o $-Q$.

Esta es la idea de un circuito eléctrico. Un conductor a través del cual se puede mover la carga (y por lo tanto se genera una corriente), gracias a que una fuente externa está manteniendo una diferencia de potencial constante entre los extremos del circuito.

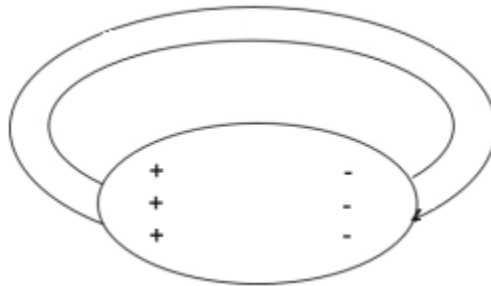


Figura 6.6: Las baterías (región ovalada), mantienen una diferencia de potencial constante

Pensemos por un momento como serán los campos eléctricos tanto en la región conductora como en las baterías. Ya hemos visto muchas veces que el campo irá de las cargas positivas a las negativas, como se ve a continuación

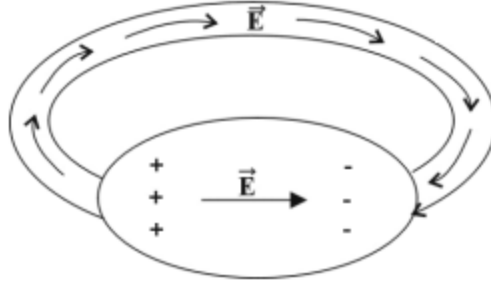
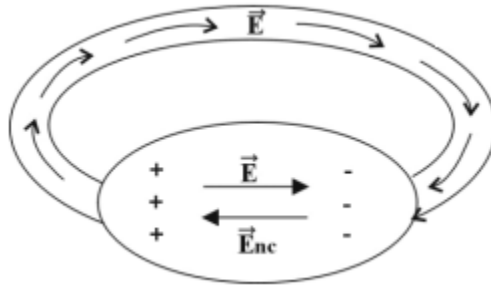


Figura 6.7: Líneas del campo electrostático

Pero esta distribución de campos presenta un claro problema. Pensemos por un momento en el trayecto de una carga (que consideraremos positiva por simplicidad) desde el lado positivo hasta el negativo. Empezará circulando por el cable hasta que llegue a la zona negativa, pero una vez ahí, no hay manera de que llegue de nuevo a la placa positiva (ya que tendría que ir en contra del campo). Es aquí donde entran las baterías, que crean un campo eléctrico que va desde las cargas negativas a las positivas y que es mucho más intenso que el campo electrostático en esa región. Es este campo el responsable de mantener constante la diferencia de potencial entre los extremos del circuito

Figura 6.8: Las baterías mantienen el campo \vec{E}_{nc} , que transporta carga del lado negativo al positivo y evita que se alcance el equilibrio

Estudiemos por un momento la naturaleza del campo \vec{E}_{nc} . Para ello, sea Γ un camino cerrado que recorre la región conductora desde el lado positivo hasta el negativo (a favor de \vec{E}) y la región de las baterías desde el lado negativo hasta el positivo (en contra de \vec{E}). Ahora, definimos la fuerza electromotriz, ε , como el trabajo realizado por el campo eléctrico por unidad de carga a lo largo de esta trayectoria cerrada

$$\varepsilon \equiv \frac{W}{q} = \frac{1}{q} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_{tot} \cdot d\vec{r} \quad (6.60)$$

Ahora podemos escribir esta integral en términos de los campos \vec{E} y \vec{E}_{nc}

$$\varepsilon = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{-}^{+} \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{r} \quad (6.61)$$

Que se puede escribir en función de la diferencia de potencial entre los extremos del circuito

$$\varepsilon = \Delta\phi - \Delta\phi + \int_{-}^{+} \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{r} = \int_{-}^{+} \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{r} \quad (6.62)$$

Y hemos llegado a la siguiente conclusión

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_{tot} \cdot d\vec{r} = \int_{-}^{+} \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{r} \quad (6.63)$$

Que debería resultar chocante, ya que esto implica que $\nabla \times \vec{E}_{tot} \neq 0$. Esto se debe a que el campo generado por las baterías no es conservativo². En una trayectoria cerrada, este campo es el único que realiza trabajo sobre las cargas. De aquí en adelante no consideraremos este campo no conservativo, ya que trabajaremos siempre en las regiones conductoras, y no en la zona de las baterías.

6.7.1. Relaciones energéticas. La ley de Joule

Ahora vamos a hacer el balance energético de nuestro circuito. Ya sabemos que la corriente que existe en la región conductora es mantenida por fuentes externas, generalmente baterías, por lo que estamos en una situación en la que a nuestro circuito le estamos bombeando energía desde el exterior. Si queremos mantener una corriente constante en el tiempo (o lo que es lo mismo, que no se acumule energía en el circuito), tendremos que exigir que toda la energía aportada por las baterías se disipe en forma de calor. De nuevo, vamos a considerar una porción diferencial de nuestro circuito

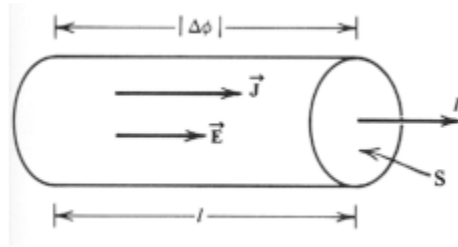


Figura 6.9: Sección diferencial de un conductor l.h.i

El trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga q será

$$W = -q\Delta\phi \quad (6.64)$$

Si ahora tomamos la variación temporal de este trabajo

$$\frac{dW}{dt} \equiv \dot{W} = -\frac{d}{dt}(q\Delta\phi) = -\frac{dq}{dt}\Delta\phi - q\frac{d\Delta\phi}{dt} \quad (6.65)$$

Ahora, si tenemos en cuenta que las baterías mantienen constante la diferencia de potencial

$$\dot{W} = -\frac{dq}{dt}\Delta\phi = -I\Delta\phi \quad (6.66)$$

Si ahora pensamos en la energía por unidad de tiempo y volumen

$$\frac{\dot{W}}{\Delta l \Delta S} \equiv w = -\frac{I}{\Delta S} \frac{\Delta\phi}{\Delta l} \quad (6.67)$$

Ahora podemos relacionar la densidad de corriente con el cociente entre intensidad y superficie

$$w = -J \frac{\Delta\phi}{\Delta l} \quad (6.68)$$

²Aunque ahora esto pueda parecer extraño, cuando introduzcamos campos magnéticos variables en el tiempo se verá que $\nabla \times \vec{E} = 0$ no es el caso general.

Si ahora hacemos tender a cero el volumen de nuestra región

$$w = -J \frac{d\phi}{dl} = JE \quad (6.69)$$

Donde hemos usado el hecho de que, en la región conductora, el campo eléctrico es conservativo. Ahora, en medios l.h.i, los campos \vec{E} y \vec{J} son paralelos, así que podemos escribir³

$$w = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (6.70)$$

Y por lo tanto, si llamamos τ a todo el volumen conductor, la energía total disipada en forma de calor será

$$\dot{W} = \int_{\tau} (\vec{J} \cdot \vec{E}) dv \quad (6.71)$$

Vamos a trabajar algo con esta ecuación para transformarla en una expresión más conocida. En primer lugar, para medios l.h.i, podemos escribir

$$w = \frac{J^2}{\sigma} = \frac{I^2}{S^2 \sigma} \quad (6.72)$$

Dividiendo y multiplicando por la longitud l

$$w = \left(\frac{l}{S\sigma} \right) \frac{I^2}{Sl} \quad (6.73)$$

El término entre paréntesis es exactamente la definición de resistencia a la que llegamos en apartados anteriores

$$w = \frac{RI^2}{Sl} \quad (6.74)$$

Y como Sl es el volumen de nuestra sección infinitesimal

$$\dot{W} = wSl = RI^2 \quad (6.75)$$

Finalmente, utilizando la ley de Ohm, esto es equivalente a

$$\dot{W} = \frac{(\Delta\phi)^2}{R} \quad (6.76)$$

Que es la expresión de la ley de Joule. Finalmente, y como expresión necesaria para el apartado siguiente, veamos una manera alternativa de escribir la potencia disipada

$$\dot{W} \equiv \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq} \frac{dq}{dt} = \varepsilon I \quad (6.77)$$

6.7.2. Leyes de Kirchhoff

Las leyes de Kirchhoff son dos ecuaciones realmente útiles para resolver circuitos, y se las conoce como ley de los nudos y ley de las mallas.

Ley de los nudos: Un nudo es todo aquel punto de un circuito en el que converjan tres o más conductores. La ley de Kirchhoff de los nudos establece que la suma total de las intensidades que entran en un nudo es nula

$$\sum_i I_i = 0 \quad (6.78)$$

³Esta ecuación podría no parecer general, pero de nuevo, la demostraremos más rigurosamente más adelante

Para demostrar esto, utilizaremos el hecho de que estamos trabajando con corrientes estacionarias

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (6.79)$$

Veamos ahora un modelo de nudo

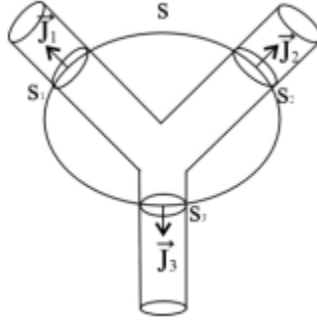


Figura 6.10: Ejemplo de un nudo en el que convergen 3 conductores

Si τ es el volumen contenido en el interior de S , tenemos que

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{J} dv = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (6.80)$$

Ahora, según la figura, $\vec{J} = 0$ excepto en las zonas en las que la superficie S corta a los conductores. Si ahora tenemos un nudo en el que convergen N conductores, tendremos que

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{J}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_{i=1}^N I_i = 0 \quad (6.81)$$

Llegando así a la expresión de la ley de los nudos.

Ley de las mallas: Una malla es cualquier camino cerrado dentro de un circuito. La ley de Kirchhoff para las mallas es la siguiente

$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_i R_i I_i \quad (6.82)$$

Para demostrarla, sea una malla cualquiera caracterizada por el camino cerrado Γ . Consideremos la siguiente integral

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (6.83)$$

A la hora de calcular esta integral tenemos que tener en cuenta que es posible que el camino γ atravesase regiones donde existe campo no conservativo. Ya hemos visto que esta integral equivale a la integral del campo no conservativo en las regiones dentro de las baterías

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \vec{E}_{nc, i} \cdot d\vec{r} \quad (6.84)$$

Considerando que existen N baterías en esta malla, y donde los γ_i son las partes de Γ interiores a las baterías. Por otro lado, podemos expandir la integral inicial en varios sumandos

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{Regiones conductoras}} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\text{Baterías}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \vec{E}_{nc, i} \cdot d\vec{r} \quad (6.85)$$

En primer lugar, si la malla tiene M elementos de resistencias R_i , la integral sobre las regiones conductoras será

$$\int_{\substack{\text{Regiones} \\ \text{conductoras}}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^M \int \vec{E}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^M V_i = \sum_{i=1}^M I_i R_i \quad (6.86)$$

Y la integral en las baterías se puede separar en la integral del campo conservativo y la del campo no conservativo

$$\int_{\text{Bat}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \vec{E}_{nc,i} \cdot d\vec{r} + \sum_{i=1}^N \int \vec{E}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \vec{E}_{nc,i} \cdot d\vec{r} + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \quad (6.87)$$

Combinando las tres últimas ecuaciones, llegamos a que

$$\sum_{i=1}^M I_i R_i + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \vec{E}_{nc,i} \cdot d\vec{r} + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \vec{E}_{nc,i} \cdot d\vec{r} \quad (6.88)$$

Y cancelando términos, llegamos a la ley de las mallas

$$\sum_{i=1}^M I_i R_i + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = 0 \quad (6.89)$$